République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure Kouba-Alger
Département de Mathématiques

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Présentée et soutenue par

Rezak SOUILAH

Existence de solutions pour un système parabolique quasi-linéaire à croissance particulière

---

Thèse dirigée par Abdelhafid MOKRANE

soutenue publiquement le 11/12/2016.

Devant le jury

Président :	Mahmoud BOUSSELSAL	Prof. ENS-Kouba (Alger)
Directeur :	Abdelhafid MOKRANE	Prof. ENS-Kouba (Alger)
Examinateur :	Mohamed Said Moulay	Prof. USTHB (Alger)
Examinateur :	Fares Mokhtari	M.C (A) Université d'Alger 1 (Alger)

Table des matières

Notations

Ω : un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$

$\partial\Omega$: frontière topologique de Ω

$x = (x_1, \cdots, x_N)$: point générique de $\mathbb{R}^N$

$dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_N$: mesure de Lebesgue sur Ω

$Q = \Omega \times]0\,, T[$ t : variable du temps, $T > 0$

$\Sigma = \partial\Omega \times]0\,, T[$

$\overline{\Omega}$: l'adhérence de l'ensemble Ω

Pour deux vecteurs $v = (v_i)_{1\leq i\leq m}$ et $w = (w_i)_{1\leq i\leq m}$, la notation $v \leq w$ désigne $v_i \leq w_i$, $\forall i = 1, \cdots, m$ et $[v]_w^k = (v^1, \cdots, v^{k-1}, w^k, v^{k+1}, \cdots, v^m)$, pour $k = 1, \cdots, m$.

$\rightharpoonup$: la convergence faible

p.p. : presque partout

V : un espace de Banach

H : un espace de Hilbert

V' : le dual topologique de V

$\langle ., . \rangle_{V'\times V}$: le crochet de dualité entre l'espace V et son dual topologique V'

$\|.\|$: la norme sur l'espace de Banach V

$(., .)$: le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H

$|.|$: la norme sur l'espace de Hilbert H

$\mathbb{R}^{m\times N}$: l'espace des matrices réelles.

Id : désigne la matrice d'identité.

$\nabla v = (\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial v}{\partial x_N})$: gradient de $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$\nabla u = (\nabla u^1, \nabla u^2, \cdots, \nabla u^m) \in \mathbf{M}^{m\times N}$: matrice, où $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$: la partie positive et négative de la fonction f

$\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$: l'espace des fonctions continues

$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \qquad \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}$: espace de Lebesgue

$\mathscr{D}(\Omega) = \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$: espace des fonctions différentiables et à support compact dans Ω

$\mathscr{D}(Q) = \mathscr{C}_0^\infty(Q)$: espace des fonctions différentiables et à support compact dans Q

$\mathscr{C}^k(\Omega),\ \mathscr{C}^k(Q)$: espace des fonctions k-fois continûment différentiables dans $\Omega,\ Q$

$\mathscr{D}'(\Omega) = (\mathscr{D}(\Omega))'$: l'espace des distributions

$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \quad \nabla u \in L^p(\Omega)\}$: un espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$

$W_0^{1,p}(\Omega)$: la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$

$W^{-1,p'}(\Omega)$: le dual topologique de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega) \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$

$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$: un espace de Sobolev

$\mathscr{C}([0,T];V)$: espace des fonctions continues à valeurs dans l'espace de Banach V

$L^p(0,T;V) = \left\{ u :]0\,,T[\longrightarrow X \quad \text{mesurable}, \int_0^T \quad \|u(t)\|_V^p dt < \infty \right\};$

$\|f\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$

$L^\infty(0,T;V) = \{u :]0\,,T[\longrightarrow V \quad \text{mesurable};\ \exists C > 0,\ \|u(t)\|_V \leq C \quad p.p.t \in]0\,,T[\}\,;$

$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)} = \inf\{C > 0; \quad \|u(t)\|_X \leq C \quad p.p.t \in]0\,,T[\}$

$\mathscr{D}([0,T];V)$: espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact et à valeurs dans V.

$\mathscr{C}^\alpha(Q) = \{u : Q \to \mathbb{R};\ \exists C > 0,\ \exists \alpha \in]0,1];\ |u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha, \quad \forall x,\, y \in Q\}$
l'espace des fonctions Höldériennes d'exposant α.

Résumé : Dans cette thèse, nous étudions l'existence de solutions bornées pour le système parabolique quasi-linéaire

$$(P)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u^\gamma}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(A_{i,j}(u)\frac{\partial u^\gamma}{\partial x_j} = G^\gamma(u,\nabla u) + F(u,\nabla u)Du^\gamma \quad \text{dans } Q, \quad \gamma = 1,\cdots,m, \\ u = 0 \qquad \text{sur} \quad \Sigma, \\ u(0) = u_0 \qquad \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où le premier terme du membre de droite de ce système $G^\gamma(u,\nabla u)$ a une croissance quadratique par rapport à ∇u, le second terme $F(u,\nabla u)\nabla u^\gamma$, où F a une croissance sous-linéaire par rapport à ∇u. Nous approchons le système (P) en remplaçant G^γ et F par $G^\gamma_\varepsilon = G^\gamma\left(1+\varepsilon|G^\gamma|\right)^{-1}$, $F_\varepsilon = F\left(1+\varepsilon|F||\nabla u|\right)^{-1}$, puis nous montrons que le système approché du système (P) admet au moins une solution bornée notée u_ε ; d'autre part, nous prouvons une estimation $(L^2(0,T;H^1_0(\Omega)))^m$ sur u_ε, puis la convergence forte dans $(L^2(0,T;H^1_0(\Omega)))^m$ de u_ε ; et enfin nous passons à la limite dans le système approché du (P).

Mots clés

Systèmes quasi-linéaire parabolique, croissance quadratique, sous et sur-solutions, solutions bornées.

Math Sujet Classifications : 35K40, 35K59, 35K51.

Abstract : In this thesis, we prove the existence of bounded solutions for quasilinear parabolic system :

$$(P)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u^\gamma}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \dfrac{\partial}{\partial x_i}(A_{i,j}(u)\dfrac{\partial u^\gamma}{\partial x_j} = G^\gamma(u,\nabla u) + F(u,\nabla u)Du^\gamma \quad \text{in } Q, \quad \gamma = 1,\cdots,m, \\ u = 0 \qquad \text{on} \quad \Sigma, \\ u(0) = u_0 \qquad \text{in } \Omega, \end{cases}$$

where the first term of the right hand side of this system $G^\gamma(u,\nabla u)$ having a quadratic growth with respect to ∇u, the second one $F(u,\nabla u)\nabla u^\gamma$, where F having a sublinear growth with respect to ∇u. We approximate the system (P) by replacing G^γ and F by $G^\gamma_\varepsilon = G^\gamma\left(1+\varepsilon|G^\gamma|\right)^{-1}$, $F_\varepsilon = F\left(1+\varepsilon|F||\nabla u|\right)^{-1}$. Then we prove that the approximated admits at least one bounded solution, denoted u_ε. Secondly we prove an $(L^2(0,T;H^1_0(\Omega)))^m$-estimate for u_ε, then the strong convergence in $(L^2(0,T;H^1_0(\Omega)))^m$ of u_ε ; and finally we pass to the limit in the approximated system of (P).

Key words : Quasilinear parabolic systems ; quadratic growth ; upper and lower solutions ; bounded solutions.
Math Subject Classifications : 35K40, 35K59, 35K51.

ملخّص

في هذه الأطروحة نسعى إلى إثبات وجود حلول ضعيفة محدودة لجملة من المعادلات التفاضلية المكافئية، شبه الخطية التالية

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u^\gamma}{\partial t}-\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N}\dfrac{\partial}{\partial x_i}(A_{i,j}(u)\dfrac{\partial u^\gamma}{\partial x_j}=G^\gamma(u,\nabla u)+F(u,\nabla u)Du^\gamma \quad dans\ Q, \quad \gamma=1,\cdots,m,\\ u=0 \qquad sur \quad \Sigma,\\ u(0)=u_0 \qquad dans\ \Omega,\end{cases}$$

حيث الطرف الأيمن لكل معادلة مكون من حدين، الأول $G^\gamma(u,\nabla u)$ ذو تزايد تربيعي بالنسبة لـ ∇u . أما الحد الثاني فهو $F(u,\nabla u)\nabla u^\gamma$ حيث $F(u,\nabla u)$ هو نفسه في جميع المعادلات، زيادة على ذلك فهو يتمتع بتزايد خطي بالنسبة لـ ∇u . نقرب الجملة (P) عن طريق استبدال G^γ و F بـ $G^\gamma_\varepsilon=G^\gamma\left(1+\varepsilon|G^\gamma|\right)^{-1}$ ، $F_\varepsilon=F\left(1+\varepsilon|F||\nabla u|\right)^{-1}$ (على الترتيب)، ثم نبرهن أنّ الجملة المقربة تتمتع بحل ضعيف محدود u_ε ، بعد ذلك نبرهن أنّ الحل التقريبي يتقارب بقوة في الفضاء $(L^2(0,T;H^1_0(\Omega)))^m$. في الأخير نمر بالنهاية في المسألة التقريبية للحصول على حل للجملة (P) .

الكلمات الإفتتاحية

جمل المعادلات التفاضلية المكافئية، تزايدات تربيعية، حلول سفلية و حلول علوية، حلول محدودة.