RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure, Kouba (Alger)
Département de Mathématiques

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur en Sciences

Par

Latifa AIT MAHIOUT

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et numérique

Homogénéisation et simulation numérique d'écoulements diphasiques immiscibles et compressibles en milieux poreux

Sous la direction de
Abdelhafid Mokrane, Pr. (ENS Kouba) et Brahim Amaziane, Maître de Conférences. (U. Pau, France)

Soutenue publiquement le 04 Juin 2016, devant le jury composé de :

Mr. Mohamed Amara	Professeur, U. de Pau, France	Président
Mr. Youcef Atik	Professeur, ENS-Kouba	Examinateur
Mr. Brahim Amaziane	Maître de Conférences, U. de Pau, France	Co-directeur
Mr. Mohand Moussaoui	Professeur, ENS-Kouba	Examinateur
Mr. Abdelhafid Mokrane	Professeur, ENS-Kouba	Directeur de thèse
Mr. Mazen Saad	Professeur, École Centrale de Nantes, France	Examinateur
Mr. Mouloudj Nouredine	Docteur, Institut Algérient du Pétrole, Sonatrach	Invité

Table des matières

1 Homogénéisation d'un modèle diphasique eau–gaz en milieu poreux **3**
1.1 Introduction . . . 3
1.2 Modèle microscopique physique–mathématique . . . 3
1.3 Formulation du modèle à l'aide de la pression globale. . . . 5
1.3.1 Classification des équations (1.25)-(1.30) : . . . 8
1.3.1.1 Classification de l'équation (1.25) . . . 8
1.3.1.2 Classification de l'équation (1.30) . . . 8
1.4 Hypothèses sur les données . . . 9
1.5 Formulation faible du problème (1.25)-(1.33) . . . 10
1.5.1 Définition d'une solution faible au problème (1.25)- (1.33) . . . 10
1.6 Résultat d'homogénéisation . . . 10
1.7 Preuve du résultat essentiel du Chapite 1 . . . 13
1.7.1 Estimations a priori. . . . 13
1.7.1.1 Égalité d'énergie . . . 13
1.8 Résultats de compacité pour les suites $\{S^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $\{\Theta^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. . . . 18
1.9 Passage à la limite dans (1.36)-(1.37) . . . 20
1.9.1 Passage à la limite dans (1.36) . . . 22
1.9.2 Passage à la limite dans (1.37) : . . . 22
1.9.3 Équations de w_p et w_s . . . 23

2 Homogénéisation d'un modèle diphasique compressible en milieu poreux. **29**
2.1 Introduction . . . 29
2.2 Modèle physique–mathématique . . . 29
2.3 Formulation du modèle à l'aide de la pression globale. . . . 31
2.4 Hypothèses sur les données . . . 31
2.5 Formulation faible du problème . . . 32
2.6 Résultat d'homogénéisation . . . 32
2.7 Preuve du résultat essentiel du Chapite 1 . . . 34
2.7.1 Estimations a priori . . . 34
2.7.2 Preuve de la Proposition 2.7.4 . . . 43
2.7.3 Passage à la limite dans (2.20)–(2.21) . . . 44
2.8 Modèle homogénéisé en terme de *pressions phasiques* . . . 49

3 Homogénéisation d'un modèle diphasique compressible en milieu poreux à double porosité. **53**

4 Simulations numériques d’écoulements diphasiques en milieux poreux **83**
4.1 Introduction 83
4.2 Présentation de DuMu^x 84
4.2.1 Installation de DuMu^x 84
4.2.2 Utilisation de DuMu^x 84
4.2.2.1 Schémas numériques 85
4.2.2.2 Traitement algébrique (linéaire et non linéaire). 85
4.2.3 Choix du pas de temps 85
4.2.4 Concepts et modèles 85
4.2.5 Systèmes de matériaux 85
4.3 Simulations numériques 86
4.3.1 Test 1 : Benchmark BOBG 1-D. 86
4.3.1.1 Modélisation physique et mathématique. 86
4.3.1.2 Résultats numériques. 89
4.3.2 Test 2 : Injection d’un gaz dans un milieu poreux 2D, saturé en eau. 92
4.3.2.1 Modélisation physique et mathématique. 92
4.3.2.2 Résultats numériques. 95
4.3.3 Test 3 : Milieu périodique. 97
4.3.3.1 Données physiques du problème. 97
4.3.3.2 Résultats numériques. 99
4.3.4 Test 4 : Milieu hétérogène. 107
4.3.4.1 Données physiques du problème. 107
4.3.4.2 Résultats numériques. 110

Table des figures

4.1 Représentation du domaine du cas test bi-matériau 1-D. 87
4.2 Courbe de la pression capillaire dans le milieu BO. 87
4.3 Courbe de la pression capillaire dans le milieu BG. 87
4.4 Représentation des perméabilités relatives dans le milieu BOBG. 88
4.5 Représentation des conditions initiales et aux limites du cas test BOBG 1-D. 89
4.6 Explication des phénomènes se déroulant dans les matériaux. 89
4.7 Représentation de la pression du gaz, la presion du liquide, la pression capillaire et la saturation du liquide en différents temps. 90
(a) pression du gaz. 90
(b) pression de l'eau 90
(c) pression capillaire 90
(d) saturation de l'eau 90
4.8 Représentation de la pression du gaz, la presion du liquide, la pression capillaire et la saturation du liquide en différents temps. 91
(a) pression du gaz. 91
(b) pression de l'eau 91
(c) pression capillaire 91
(d) saturation de l'eau 91
4.9 Représentation de la pression du gaz, la presion du liquide, la pression capillaire et la saturation du liquide en différents temps. 92
4.10 Représentation des conditions initiales et aux limites du test 2. 95
4.11 Représentation de la pression du gaz (à gauche) et la saturation du liquide (à droite) en différents temps : en haut 50 ans, au milieu 1000 ans, en bas 10 000 ans. 96
(a) T=50 ans 96
(b) T=1000 ans 96
(c) T=10000 ans 96
4.12 Représentation de la perméabilité du milieu périodique. 97
4.13 Représentation de la pression capillaire. 98
4.14 Représentation des permébilités relatives. 98
4.15 maillage 40×40. 99
4.16 maillage 80×80. 99
4.17 Pression de l'eau en diagonale. 100
4.18 Saturation de l'eau en diagonale. 100
4.19 Pression de l'eau en diagonale. 100
4.20 Saturation de l'eau en diagonale. 100

4.21 Profil des saturations de l'eau en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite). 102
(a) T=1an 102
(b) T=10 ans 102
(c) T=22 ans 102
4.22 Profil des saturations de l'huile en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite). 103
(a) T=1an 103
(b) T=10 ans 103
(c) T=22 ans 103
4.23 Profil des pressions de l'eau en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite). 104
(a) T=1an 104
(b) T=10 ans 104
(c) T=22 ans 104
4.24 Profil des pressions de l'huile en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite). 105
(a) T=1an 105
(b) T=10 ans 105
(c) T=22 ans 105
4.25 Saturations de l'eau en diagonale (à gauche) et saturations de l'huile en diagonale (à droite) en milieu hétérogène et homogénéisé. 106
4.26 Pressions de l'eau en diagonale (à gauche) et pressions de l'huile en diagonale (à droite) en milieu hétérogène et homogénéisé. 106
4.27 Représentation du débit total d'huile récupérée. 107
4.28 Représentation des perméabilités du milieu hétérogène. 108
4.29 Représentation des perméabilités du milieu homogénéisé. 110
4.30 Profil des saturations de l'eau en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite). 111
(a) T=1an 111
(b) T=10 ans 111
(c) T=29 ans 111
4.31 Profil des saturations de l'huile en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite). 112
(a) T=1an 112
(b) T=10 ans 112
(c) T=29 ans 112
4.32 Profil des pressions de l'eau en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite). 113
(a) T=1an 113
(b) T=10 ans 113
(c) T=29 ans 113
4.33 Profil des pressions de l'huile en milieu hétérogène (à gauche) et en milieu homogénéisé (à droite). 114
(a) T=1an 114
(b) T=10 ans 114
(c) T=29 ans 114
4.34 Saturations de l'eau en diagonale (à gauche) et saturations de l'huile en diagonale (à droite) en milieu hétérogène et homogénéisé. 115

4.35 Pressions de l'eau en diagonale (à gauche) et pressions de l'huile en diagonale (à droite) en milieu hétérogène et homogénéisé. 115
4.36 Représentation du débit total d'huile récupérée. 116

Nomenclature

- Ω domaine de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ figurant un milieu poreux.
- $\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Gamma_1} \cup \bar{\Gamma_2}$ frontière du domaine Ω.
- $\overrightarrow{n}$ normale unitaire à une frontière, orientée vers l'extérieur.
- t, T variable temporaire et temps final.
- h pas du maillage dans Ω.
- Δt pas de discrétisation en temps dans $[0, T[$.
- $K = K(x)$ perméabilité, en (m^2).
- μ_i $(i = \ell, g)$ viscosité du fluide en Pa.s.
- ρ_i $(i = \ell, g)$ masse volumique de la phase i, en $kg.m^{-3}$.
- ϕ porosité totale (sans dimension).
- g accélération de la pesanteur.
- kr_i perméabilité relative de la phase i.
- $\overline{q}$ vitesse de Darcy.
- p_i $(i = \ell, g)$ la pression de la phase i, en Pa.
- P pression globale.
- P_c pression capillaire

Les opérateurs

- $(f)^+$, $(f)^-$ $\max(f, 0)$, $\min(f, 0)$.
- $\xi|$ norme euclidienne pour $\xi \in \mathbb{R}^d$.
- $\cdot$ produit scalaire entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$.

Les espaces fonctionnels

- $L^p(\Omega) := \{f;$ mesurable surΩ; tel que $\displaystyle\int_\Omega |f|^p dx < \infty\}, 1 \leq p \leq \infty.$
- $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); u' \in L^2(\Omega)\}.$
- $H^1_{\Gamma_1} = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0$ sur $\Gamma_1\}$

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'homogénéisation par la méthode de convergence à deux échelles, et à la simulation numérique par le code DuMu$^{\text{x}}$ (voir [85]), d'écoulements diphasiques immiscibles et compressibles en milieux poreux.

L'exploitation d'un gisement pétrolifère conduit au développement de diverses méthodes de techniques de récupération assistée du pétrole. L'une de ces techniques est celle de la récupération secondaire, qui consiste à pousser l'huile vers les puits de production en injectant de l'eau par d'autres puits qui sont réservés à cet effet. Du point de vue mathématique, ceci conduit à la modélisation d'un écoulement diphasique immiscible et compressible en réservoir naturellement fracturé, ce qui est l'objectif principal de cette thèse.

Les réservoirs naturellement fracturés peuvent être modélisés par deux milieux superposés : un système de fractures et un système de bloc de matrices (réservoirs entièrement fracturés). Le système de fractures a une faible capacité de stockage, et une conductivité élevée, tandis que le système de blocs de matrices a une faible conductivité en comparaison avec le système de fractures. La majeure partie du fluide est transportée à travers le système des fractures, et le reste est stocké dans les bloc de matrices. Lorsque le système de fissures et si développé que la matrice est divisée en blocs individuels ou en cellules qui sont isolées les unes des autres (Warren-Root géométrie [57], ou comme des cubes de sucre), il n'y a pas d'écoulement direct de cellule à cellule, mais plutôt un échange de fluide entre chaque cellule et le système de fractures. Pour plus de détails sur la formulation physique de ces problèmes, (voir [25, 70, 57]).

Dans cette thèse, nous concentrons notre attention sur la modélisation d'un écoulement diphasique non miscible et compressible dans des réservoirs fracturés, en ayant un regard sur le déplacement forcé eau-huile, qui est un mécanisme crucial pour la récupération secondaire de l'huile. Au cours de ces dernières années, l'intérêt pour l'écoulement et le transport de fluides en milieux fracturés avec une perméabilité faible, a beaucoup augmenté, et une des raison importante à cet intérêt est que les réservoirs fracturés d'hydrocarbures fournissent plus de 20% de réserves et de production du pétrole dans le monde (voir [72] et les références qui y sont). La recherche vise à comprendre le processus qui détermine le chemin qui suit l'écoulement, et le taux de fluide mouillant dans les masses de la roche fracturée.

Pour modéliser ces problèmes d'écoulement, il y a toujours de multiples échelles de longueur dans les coefficients physiques qui gouvernent les équations. D'autre part, la taille du réservoir ne permet pas une simulation à fine échelle, sur plusieurs temps malgré la modernisation des ordinateurs, et l'avancement de la technologie du calcul parallèle. Par conséquent, un compromis doit être réalisé entre la précision souhaitée et les ressources informatiques disponibles. Un compromis standard est d'échelonner les coefficients qui font qu'on est obligé d'utiliser un maillage grossier. La description à grande échelle devra intégrer deux différents mécanismes d'écoulement. Pour certains ratios de perméabilités, et quelques largeurs de fissures, la description à grande échelle est obtenue par l'introduction du modèle dit à double porosité. Il a été introduit pour décrire le comportement global du milieu poreux fracturé par Barenblatt et al. [22], et il est depuis utilisé dans l'ingénierie liée à la hydrogéologie, l'ingénierie des réservoirs pétrolifère, la génie civile, ou encore la science du sol.

Dans cette thèse, nous nous concentrerons sur un système non linéaire d'équations de convection-diffusion dans un domaine, modélisant l'écoulement et le transport de fluides non miscible et compressibles dans un

milieu poreux hétérogène, en prenant en compte la pression capillaire et la gravité. Les équations du modèle sont dérivées de la loi de conservation de la masse pour les deux fluides, ainsi que les relations constitutives de la vitesse du gradient, de la pression, et les effets de gravités. Traditionnellement, la loi standard de Darcy-Muskat fournit ces relations. Cette formulation nous donne un système couplé constitué d'équations paraboliques non linéaires pour le liquide et la pression du gaz, en ajoutant les conditions au bord et les conditions initiales qui conviennent. Il existe deux types de dégénérescence dans le système étudié. La première est la dégénérescence classique de l'opérateur de diffusion. Cette dégénérescence est due aux effets de la pression capillaire ; il peut être observé même dans le cas d'un écoulement diphasique incompressible. La seconde concerne la dégénérescence du terme d'évolution. Il se produit dans la région où les saturations du fluide sont nulles. Dans les deux cas, la présence de la dégénérescence affaiblie les estimations d'énergie et fait la preuve des résultats de compacité plus impliqués.

Cette thèse est organisée de la manière suivante : On commence par une introduction générale. Dans le Chapitre 1, on présente une synthèse des résultats obtenus dans [6], et on rappelle les principaux résultats qui nous seront utiles pour la suite. Il s'agit de l'homogénéisation d'un écoulement diphasique immiscible compressible eau–gaz, dans un milieu poreux à structure périodique. La phase eau est supposée incompressible, tandis que la phase gaz est compressible. On commence par écrire le modèle microscopique en utilisant les équations de conservation de la masse, et la loi standard de Darcy–Muskat pour chaque phase, puis on passe à la formulation du modèle microscopique en utilisant le concept de la pression globale (voir [17, 36]). Après ça, afin d'obtenir le problème homogénéisé associé, on commence par faire des estimations *a priori* indispensables, puis on formule le théorème de compacité essentiel à l'obtention du résultat d'homogénéisation après passage à la limite faible et à deux échelles. Dans le Chapitre 2, on généralise les résultats obtenus dans [6]. À savoir, on considère l'homogénéisation d'un écoulement diphasique immiscible et compressible liquide–gaz dans un milieu poreux périodique, avec des coefficients à oscillations rapides. Dans ce chapitre, on suppose que le liquide et le gaz sont des fluides compressibles. En suivant les mêmes étapes suivies dans le Chapitre 1, et en utilisant des idées du papier [8], on obtient finalement le modèle global en terme de pressions phasiques homogénéisées, ce qui généralise les résultats de [6]. Dans le Chapitre 3, on présente le résultat principal de cette thèse. Dans ce chapitre, on étudie le problème de l'homogénéisation d'un écoulement diphasique immiscible et compressible dans un milieu poreux à double porosité. Le problème microscopique est écrit en terme des pressions et saturations de chaque phase. Le milieu fracturé est composé de fractures, et de blocs de matrice $\varepsilon-$ périodiquement distribuées, avec une perméabilité d'ordre ε^2. La difficulté de ce chapitre est de prouver le résultat de compacité dans le cas d'un modèle couplé non linéaire. On obtient la convergence des solutions ainsi que le modèle macroscopique en utilisant le concept de convergence à deux échelles, et la technique de dilatation. Le modèle global (homogénéisé) est donné en termes des pressions phasiques homogénéisées. Le résultat principal de ce chapitre est une importante généralisation du papier [11]. La thèse se termine par le Chapitre 4 qui est consacré à la simulation numérique d'écoulements diphasiques immiscibles en milieux poreux, en utilisant le code DuMu$^{\text{x}}$. On commence par une présentation du code DuMu$^{\text{x}}$, puis, on présente des simulations numériques pour quatre tests : les tests 1 et 2 sont des benchmarks proposés par le GdR MoMaS (voir [82]). Ces tests nous ont permis d'avoir une vision précise sur ce que l'on peut faire avec DuMu$^{\text{x}}$ pour la simulation numérique des écoulements diphasiques en milieux poreux, et de sa prise en main. Les tests 3 et 4 sont des simulations numériques pour le problème étudié dans le Chapitre 1 de ce travail. Dans le test 3, le milieu poreux considéré est périodique, tandis que dans le test 4, le milieu poreux est hétérogène. Ces deux tests nous ont permis de faire une comparaison entre les simulations faites en milieu hétérogène, et les simulations faites en milieu homogénéisé, ce qui nous a permis d'apprécier la justesse des approximations obtenues par la méthode de l'homogénéisation.

Mots clés : Compressible, immiscible, milieu double porosité, écoulement diphasique, milieu poreux fracturé, homogénéisation, convergence à deux échelles, DuMu$^{\text{x}}$.

Abstract

The thesis is devoted to the homogenization by the two-scale convergence method and numerical simulation using the code DuMu^x (see, e.g., [85]) of the immiscible compressible two-phase flow in porous media.

The exploitation of oil containing formations requires the development of various technical methods of the enhanced oil recovery. One of these methods concerns the secondary oil recovery. It is based on the oil displacement by the water towards the production wells. From the mathematical point of view, this leads to the modeling of the immiscible compressible two-phase flow in naturally fractured reservoirs which is the main objective of the thesis.

Naturally-fractured reservoirs can be modeled by two-superimposed continua, a connected fracture system and a system of topologically disconnected matrix blocks (totally fractured reservoirs). The fracture system has a low storage capacity and high a conductivity, while the matrix block system has a conductivity that is low in comparison to that in the fractures. The majority of fluid transport will occur along flow paths through the fissure system, and the relative volume and storage capacity of the porous matrix is much larger than that of the fissure system. When the system of fissures is so well developed that the matrix is broken into individual blocks or cells that are isolated from each other (Warren-Root geometry [57] or sugar cubes), there is, consequently, no flow directly from cell to cell, but only an exchange of fluid between each cell and the surrounding fissure system. For more details on the physical formulation of such problems see, e.g., [25, 70, 57].

In this thesis, we focus our attention on the modeling of immiscible compressible two-phase flow through fractured reservoirs with an eye towards the studies of the forced oil-water displacement which is a crucial mechanism of secondary oil recovery. In recent years the interest has increased considerably in the area of flow and transport in low permeability fractured rocks. One important reason for this is that the fractured hydrocarbon reservoirs provide over 20% of the world's oil reserves and production (see, e.g., [72] and the references therein). The research is aimed at understanding the processes that determine the flow paths and the flow rates of the wetting fluids in fractured rock masses.

For modeling such flow problems, there are always multiple length scales in the physical coefficients for the governing equations. On the other hand, the size of the reservoir prohibits a full fine scale simulation over many time steps, even with the advent of modern computers and parallel computing technology. Therefore, a compromise has to be made between desired accuracy and available computer resources. The standard compromise is to upscale the coefficients which enables the use of a coarse computational grid. The large-scale description will have to incorporate the two different flow mechanisms. For some permeability ratios and some fissures width, the large-scale description is achieved by introducing the so-called *double-porosity model*. It was introduced first for describing the global behavior of fractured porous media by Barenblatt *and al.* [22] and it is since used in a wide range of engineering specialties related to geohydrology, petroleum reservoir engineering, civil engineering or soil science.

In this thesis we will be concerned with a nonlinear system of diffusion-convection equations in a domain modeling the flow and transport of immiscible compressible fluids through heterogeneous porous media, taking into account capillary and gravity effects. The governing equations are derived from the mass conservation laws of both fluids, along with constitutive relations relating the velocities to the pressure gradients and gravitational effects. Traditionally, the standard Darcy–Muskat law provides this relationship. This formulation leads to a coupled system consisting of nonlinear parabolic equations for the liquid and gas pressures, subject to appropriate boundary and initial conditions. There are two kinds of degeneracy in the studied system. The first one is the classical degeneracy of the diffusion operator. This degeneracy is due to the capillary effects ; it can be observed even in the case of incompressible two-phase flow. The second one represents the evolution term degeneracy. It occurs in the region where the fluid saturations vanish. In both cases the presence of degeneracy weakens the energy estimates and makes a proof of compactness results more involved.

The thesis is organized as follows. It is started by the Introduction section.

Chapter 1 is devoted to a detailed review of the results obtained in paper [6]. Namely, we consider the homogenization of immiscible compressible two-phase flow, like water-gas flow, in porous media with periodic rapidly oscillating coefficients. The water phase is assumed to be incompressible, whereas the gas phase is compressible. The microscopic model is written using the mass conservation law for each phase along with the standard Darcy-Muskat law. The first step is to obtain the appropriate *a priori* estimates for the solution of the problem under consideration. In order to pass to the limit in the standing equations, we reformulate them in terms of the global pressure (see, e.g., [17, 36]) and saturation function. The compactness results are also formulated. The homogenized model is then obtained by the two-scale convergence method in the weak formulation of our problem in temrs of the global pressure and saturation. In Chapter 2, we generalize the results obtained in [6]. Namely, we consider the homogenization of immiscible compressible two-phase flow, like liquid-gas flow, in porous media with periodic rapidly oscillating coefficients. In this chapter we assume that both, the liquid and the gas, are compressible fluids. Following the lines of Chapter 1 and using the ideas of paper [8] we, finally, obtain the global model in terms of the homogenized phase pressures which generalizes the results of [6]. In Chapter 3 we present the main results of the thesis. In this chapter we study the homogenization problem for two-phase immiscible compressible flow in porous media with double porosity. The microscopic model is written in terms of the phase pressures and saturation. The fractured-porous media is made of fractures and ε-periodically distributed matrix blocks with the permeability of order ε^2. The main difficulty in this chapter is the proof of the compactness result in the case of a degenerate non-linear coupled model. We obtain the convergence of solutions, as well as the macroscopic model using the concept of two-scale convergence and the dilatation technic. The global (homogenized) model is given in terms of the homogenized phase pressures. The main result of the chapter is an important generalization of paper [11]. The thesis concludes with Chapter 4 which is devoted to the numerical simulation of two-phase immiscible flow in porous media using the code DuMu$^{\text{x}}$. It begins with a presentation of the code DuMu$^{\text{x}}$. Then we give the numerical simulation to four tests : Tests 1, 2 are the benchmarks proposed by GdR MoMaS (see [82]). These tests enable to give a clear vision of the capabilities of DuMu$^{\text{x}}$ in the numerical simulations of two-phase flow in porous media. Tests 3, 4 present the numerical results for the problem studied in Chapter 1. In particular, in Test 3, the porous medium is periodic, while in Test 4, the porous medium is heterogeneous. Both tests enable to make comparison between simulation in heterogeneous media and simulation in homogenized media. This simulation shows the correctness of the approximation obtained by the homogenization.

Key words : Compressible, immiscible, double porous media, two-phase flow, fractured-porous media, homogenization, two-scale convergence, DuMu$^{\text{x}}$.