
République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure
Kouba, Alger



Mémoire présenté pour obtenir le grade de magister

Par : Mohamed Lamine MOSTEFAI

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyses fonctionnelle et numérique

**Un modèle de récupération assistée d'hydrocarbures
par injection d'eau**

Sous la direction de monsieur Youcef ATIK, Professeur à l'École Normale Supérieure

Soutenu le 07/06/2016

Devant le jury :

M. Abdelhafid MOKRANE	Professeur, ENS Kouba	Président
M. Abdelaziz CHOUTRI	MCA, ENS Kouba	Examineur
M. El Hacene OUAZAR	MCA, ENS Kouba	Examineur
M. Mohamed KHODJA	Chercheur, DTD Boumerdes	Invité
M. Youcef ATIK	Professeur, ENS Kouba	Directeur de mémoire

Table des matières

0	Introduction Générale	3
1	Quelques outils d'analyse fonctionnelle	6
1.1	Premières propriétés et théorème de Lax-Milgram	6
1.2	Espaces de Sobolev	8
1.3	Les espaces impliquant le temps	11
1.4	Quelques notions de convergence et théorème de Fréchet-Kolmogorov	13
1.5	Le degré topologique	14
2	Modélisation mathématique d'écoulement diphasique en milieux poreux	16
2.1	Généralités sur les milieux poreux	17
2.2	Le gisement	18
2.3	Paramètres du milieu poreux	20
2.4	Les Équation fondamentales	22
2.5	Modélisation des réservoirs	25
2.6	Conclusion	29
3	Méthode de volumes finis généralisée d'un écoulement diphasique	30
3.1	Schéma volume finis	30
3.2	Schéma numérique	34
3.3	L'estimation a priori et l'existence de solution discrète	45
3.4	L'estimation des translatées en espace et en temps	65
3.5	Résultat de la convergence	69
3.6	Test numérique	74
3.7	conclusion	80
4	Simulations numériques des écoulements diphasiques en milieu poreux	81
4.1	Présentation de DuMu ^x	81
4.2	Modèle mathématique	83

4.3	Simulation numérique	84
4.4	Conclusion	90
5	Annexe	93
5.1	Annexe-1	93
5.2	Annexe-2	95
5.3	Annexe-3	97

Table des figures

2.1	Échantillon de milieu poreux	18
2.2	Coupe typique	19
3.1	mailles admissibles1	31
3.2	Graphes des mobilités relatives d’huile et d’eau et de fonction de flux	79
3.3	Graphe de solutions approchées d’équation Buckley-Leverett	80
3.4	Graphe de solutions approchées d’équation de transport	80
3.5	Graphe de solutions approchées d’équation de Burger	80
4.1	Les maillages non-structurés[35]	83
4.2	Géométrie de problème de tutoriel avec les conditions initiales et aux bords	84
4.3	Profile de la saturation de l’huile à l’instant final	85
4.4	Profile de la saturation de la pression d’eau à l’instant final	85
4.5	géométrie de test 1 avec les conditions aux limites et initiales.	86
4.6	Profile de la saturation de l’huile et la pression d’eau à l’instant final	86
4.7	La géométrie du test 2 avec les paramètre considérés.	87
4.8	Profile de la saturation de l’huile et la pression d’eau à l’instant final	87
4.9	La géométrie du test 2 avec les paramètre considérés.	88
4.10	Les conditions aux limites de test 2.	88
4.11	Variation du profil de la saturation d’huile au cours du temps et la pression d’eau à l’instant final	88
4.12	La géométrie du test 4 avec les conditions aux limites.	89
4.13	Conditions aux limites dépendant du temps	89
4.14	Variation du profil de la saturation d’huile au cours du temps et la pression d’eau à l’instant final	90

Notations

Dans tous ce qui suit, voici les notations utilisées :

- Ω le domaine tel que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $d = 1, 2, \dots$
- $\Gamma = \partial\Omega$: frontière du domaine Ω
- $x = x, (x, y)$: variable d'espace dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
- t, T : variable temporelle et temps final, en (s)
- $\Omega_T = \Omega \times]0, T[$.
- $\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$
- h : pas du maillage dans Ω , en (m)
- δt : pas de discrétisation en temps dans $(0, T)$, en (s)
- $\phi = \phi(x)$: porosité du milieu poreux en (%)
- $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x)$: tenseur des perméabilités absolues en (Darcy)
- $i = w, o$: fluide mouillant ($w =$ l'eau) et non mouillant ($o =$ l'huile (ou bien $i = n$ l'huile))
- $s_i = s_i(x, t)$: saturation de la phase i ($i = o$ (ou n), w), en (%)
- $p_i = p_i(x, t)$: pression de phase i ($i = o$ (ou n), w), en (Pa)
- $p = p(x, t)$: pression globale en (Pa)

Les constantes :

- ρ_i : masse volumique du fluide i , $i = o$ (ou n), w , en ($g.m^{-3}$)
- μ_i : viscosité du fluide i , $i = o$ (ou n), w , en (Pa.s)
- \vec{g} : accélération de la pesanteur, en ($m.s^{-2}$)

Les fonctions de la saturation :

- $k_{ri} = k_{ri}(s)$: perméabilité relative du fluide i , $i = o$ (ou n), w
- $\lambda_i = \lambda_i(s)$: mobilité relative du fluide i , $i = o$ (ou $i = n$), w ,
- $\lambda = \lambda(s)$: mobilité totale
- $p_c = p_c(s)$: pression capillaire
- $\varphi = \varphi(s)$: diffusion capillaire, fonction non linéaire de s
- $f = f(s)$: fraction du flux, fonction non linéaire de s

Les espaces fonctionnels :

- $L^p(\Omega) := \{f; \mathcal{L}^d\text{-mesurable sur } \Omega \mid \|f\| < C < \infty\}, 1 \leq p < \infty$
- $L^\infty(\Omega) := \{f; \mathcal{L}^d\text{-mesurable sur } \Omega \mid \int_\Omega |f| < \infty \mathcal{L}^d\text{-p.p. sur } \Omega\}$
- $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$: espace des fonctions mesurables $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ avec $\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, $1 \leq p < \infty$).
- $L^p_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \in L^p(\omega) \text{ pour tout compact } \bar{\omega} \subset \Omega\}$
- $W^{m,p}(\Omega) = \{w \in L^p(\Omega); D^\delta w \in L^p(\Omega); \text{pour } \|\delta\| := \sum_{i=1}^d \delta_i \leq m\}$
- $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$, espace de Sobolev d'ordre m
- $C^m(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } D^\delta \text{ est continue sur } \Omega, |\delta| := \sum_{i=1}^d \delta_i \leq m\}$
- $C_0^m(\Omega)$: espace des fonctions de $C^m(\Omega)$ à support compact dans Ω
- $\mathcal{M}(\Omega)$: espace des mesures de Radon sommables sur Ω .
- $H(\text{div}; \Omega) := \left\{ \vec{q} \in (L^2(\Omega))^d \mid \text{div}(\vec{q}) \in L^2(\Omega) \right\}$.
- Pour X un espace de Banach, on note $L^p(0, T; X)$, l'espace défini par :
 $L^p(0, T; X) = \{f : (0, T) \rightarrow X \mid \text{mesurable avec } \int_0^T (\|f\|_X)^p dx < \infty\}$

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة طريقة عددية لقطعنة نموذج رياضياتي يتحكم في جريان مائع ثنائي الطور غير قابل للانضغاط وغير مزوج في وسط مسامي غير متجانس موضعيا واتجاهاتيا (heterogeneous and anisotrop) .

تتمتع هذه الطريقة بتطبيقات في ميدان الانتاج الثنائي للمحروقات.

يتكون النموذج قيد الدراسة من مسألة ذات القيم الحدية والابتدائية مرفقة بجملة تشمل على معادلتين ذات مشتقات جزئية، الأولى من النوع الناقصي القهري (elliptic coercive) (معادلة الضغط) والثانية (معادلة التشبع) من النوع المكافئ المنحل (parabolic degenerate) للحمل والانتشار (convection-diffusion) .

إننا نقطعن المعادلة الناقصية باستعمال خطة الهجوم المنتهية الهجينة.

أما المعادلة المكافئة فنقطعنها بواسطة خطة ضمنية نسبة إلى الزمن ونقرب تدفق الانتشار باستخدام خطة الهجوم المنتهية الهجينة (الأمر الذي يسمح بمعالجة الحالات حيث مؤثر النفاذية غير متجانس في الموضع وفي الاتجاهات معتمدين على تشبيك عام).

وفيما يخص تدفق الحمل (الذي قد يكون غير رتيب ومتقطعاً نسبة إلى متغيرات الفضاء) فيعالج بخطة من نوع غودونوف (Godunov) .

إننا نبرهن على وجود حلول مقطعة تتقارب نحو حل معمم للمسألة الأصلية (المستمرة).

ونقدم تجارب عددية في بعد واحد تستخدم برامج مكتوبة باللغة المتطورة C++ .

وأخيراً، نستخدم البرمجية الحرة DuMu^x لتقديم تجارب عددية في بعدين، تحاكي جريان سائل ثنائي الطور (زيت وماء) في وسط مسامي وهذا باستخدام بيانات لمكمن حقيقي للمحروقات.

Abstract

In this work, we present a numerical method for a two-phase flow model for an incompressible and immiscible fluid in heterogeneous and anisotropic media.

This method has applications in the secondary oil recovery.

We give and analyze a finite volume scheme to discretize a boundary value and initial condition problem associated with a system involving an elliptic and coercive equation (for pressure) coupled with a degenerate parabolic convection-diffusion equation (for saturation).

The elliptical equation is discretized using a hybrid finite volume scheme.

The degenerate parabolic equation is discretized by using an implicit scheme in time and approximating the diffusive flux by the method of hybrid finite volume (this permit to handle the case of an anisotropic and heterogeneous permeability tensor on very general mesh).

The convective flux (which may be discontinuous and non-monotonic with respect of spatial variables) is processed by a Godunov's type scheme.

We prove the existence of approximate solutions which converge to a weak solution to the continuous problem.

We present numerical tests in one dimension using programs written in C++ language.

Finally, in two dimensions, we present numerical tests using the free simulator DuMu^x for a two-phase flow (oil-water) in porous media with real parameters of an oil reservoir.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions une méthode numérique pour discrétiser un modèle d'écoulements diphasiques incompressibles et immiscibles en milieu poreux hétérogènes et anisotropes.

Cette méthode possède des applications dans les problèmes de récupération secondaire du pétrole.

Le modèle qui nous intéresse consiste en un problème aux limites et à la condition initiale associées à un système formé d'une équation elliptique coercitive (pour la pression) couplée avec une équation parabolique dégénérée de convection-diffusion (pour la saturation).

L'équation elliptique est discrétisée en utilisant un schéma de volumes finis hybrides. Quant à l'équation parabolique dégénérée, elle est discrétisée en utilisant un schéma implicite en temps et en approchant les flux diffusifs par la méthode des volumes finis hybride (ce qui permet de traiter le cas d'un tenseur de perméabilité anisotrope et hétérogène sur un maillage très général).

Les flux convectifs (qui peuvent être non monotones et discontinus par rapport aux variables spatiales) sont traités par un schéma de type Godunov.

Nous démontrons l'existence de solutions discrètes qui convergent vers une solution faible du problème continu.

Nous présentons des tests numériques unidimensionnels utilisant des programmes écrits en langage évolué C++.

Finalement, en utilisant le logiciel libre DuMu^x, nous présentons des tests numériques en deux dimensions simulant l'écoulement diphasique eau-huile dans un milieu poreux réalisés avec des paramètres réels de réservoir.
