République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure
Kouba, Alger

Mémoire présenté pour obtenir le grade de magister

Par : Mohamed Lamine MOSTEFAI

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyses fonctionnelle et numérique

Un modèle de récupération assistée d'hydrocarbures par injection d'eau

Sous la direction de monsieur Youcef ATIK, Professeur à l'École Normale Supérieure

Soutenu le 07/06/2016
Devant le jury :

M. Abdelhafid MOKRANE	Professeur, ENS Kouba	Président
M. Abdelaziz CHOUTRI	MCA, ENS Kouba	Examinateur
M. El Hacene OUAZAR	MCA, ENS Kouba	Examinateur
M. Mohamed KHODJA	Chercheur, DTD Boumerdes	Invité
M. Youcef ATIK	Professeur, ENS Kouba	Directeur de mémoire

Table des matières

Table des figures

Notations

Dans tous ce qui suit, voici les notations utilisées :

— Ω le domaine tel que $\Omega \subset \mathbb{R}^d \quad$ et $\quad d = 1, 2...$

— $\Gamma = \partial\Omega$: frontière du domaine Ω

— $x = x, (x, y)$: variable d'espace dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

— t, T : variable temporaire et temps final, en (s)

— $\Omega_T = \Omega \times]0, T[$.

— $\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}$

— h : pas du maillage dans Ω ,en (m)

— δt : pas de discrétisation en temps dans $(0, T)$, en (s)

— $\phi = \phi(x)$: porosité du milieu poreux en $(\%)$

— $\mathbf{K} = \mathbf{K}(x)$: tenseur des perméabilités absolues en (`Darcy`)

— $i = w, o$: fluide mouillant ($w =$ l'eau) et non mouillant ($o =$ l'huile (ou bien $i = n$ l'huile))

— $s_i = s_i(x, t)$: saturation de la phase i $(i = o($ ou$n), w)$, en $(\%)$

— $p_i = p_i(x, t)$: pression de phase i $(i = o($ ou$n), w)$, en (Pa)

— $p = p(x, t)$: pression globale en (Pa)

Les constantes :

— ρ_i : masse volumique du fluide i, $i = o($ ou$n)w$, en $(g.m^{-3})$

— μ_i : viscosité du fluide i, $i = o($ ou$n), w$, en $(Pa.s)$

— $\vec{g}$: accélération de la pesanteur, en $(m.s^{-2})$

Les fonctions de la saturation :

— $k_{ri} = k_{ri}(s)$: perméabilité relative du fluide i, $i = o($ ou$n), w$

— $\lambda_i = \lambda_i(s)$: mobilité relative du fluide i, $i = o($ ou$i = n), w$,

— $\lambda = \lambda(s)$: mobilité totale

— $p_c = p_c(s)$: pression capillaire

— $\varphi = \varphi(s)$: diffusion capillaire, fonction non linéaire de s

— $f = f(s)$: fraction du flux, fonction non linéaire de s

Les espaces fonctionnels :

— $L^p(\Omega)$:=$\{f; \mathcal{L}^d$-mesurable sur $\Omega \mid \|f\| < C < \infty\}, 1 \leq p < \infty$

— $L^\infty(\Omega)$:=$\{f; \mathcal{L}^d$-mesurable sur $\Omega \mid \int_\Omega |f| < \infty \mathcal{L}^d-$p.p.sur $\Omega\}$

— $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$: espace des fonctions mesurables $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ avec $\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, $1 \leq p < \infty$).

— $L^p_{loc}(\Omega)$:=$\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \in L^p(\omega)$ pour tout compact $\overline{\omega} \subset \Omega\}$

— $W^{m,p}(\Omega) = \{w \in L^p(\Omega); D^\delta w \in L^p(\Omega); pour \|\delta\| := \sum_{i=1}^d \delta_i \leq m\}$

— $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$, espace de Sobolev d'ordre m

— $C^m(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$tel que D^δest continue sur $\Omega, |\delta| := \sum_{i=1}^d \delta_i \leq m\}$

— $C^m_0(\Omega)$: espace des fonctions de$C^m(\Omega)$ à support compact dans Ω

— $\mathcal{M}(\Omega)$: espace des mesures de Radon sommables sur Ω .

— $H(\text{div}; \Omega) := \Big\{\vec{q} \in (L^2(\Omega))^d \mid div(\vec{q}) \in L^2(\Omega)\Big\}$.

— Pour X un espace de Banach, on note $L^p(0, T; X)$, l'espace défini par : $L^p(0, T; X) = \{f : (0, T) \to X \mid$ mesurable avec $\int_0^T (\|f\|_X)^p dx < \infty\}$

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة طريقة عددية لقَطْعنة نموذج رياضياتي يتحكم في جريان مائع ثنائي الطور غير قابل للانضغاط وغير مزوج في وسط مسامي غير متجانس موضعيا واتجاهاتيا (heterogeneous and anisotrop) .

تتمتع هذه الطريقة بتطبيقات في ميدان الانتاج الثنائي للمحروقات.

يتكون النموذج قيد الدراسة من مسألة ذات القيم الحدية والابتدائية مرفقة بجملة تشمل على معادلتين ذات مشتقات جزئية، الأولى من النوع الناقصي القهري (elliptic coercive) (معادلة الضغط) والثانية (معادلة التشبع) من النوع المكافئ المنحل (parabolic degenerate) للحمل والانتشار (convection-diffusion) .

إننا نقطعن المعادلة الناقصية باستعمال خطة الحجوم المتهية الهجينة.

أمّا المعادلة المكافئة فنقطعنها بواسطة خطة ضمنية نسبة إلى الزمن ونقرب تدفق الانتشار باستخدام خطة الحجوم المتهية الهجينة (الأمر الذي يسمح بمعالجة الحالات حيث مُوتر النفاذية غير متجانس في الموضع وفي الاتجاهات معتمدين على تشبيك عام).

وفيما يخص تدفق الحمل (الذي قد يكون غير رتيب ومتقطعًا نسبة إلى متغيرات الفضاء) فيعالج بخطة من نوع غودونوف (Godunov) .

إننا نبرهن على وجود حلول مقطعنة تتقارب نحو حل معمم للمسألة الأصلية (المستمرة).

ونقدم تجارب عددية في بعد واحد تستخدم برامج مكتوبة باللّغة المتطورة C++ .

وأخيراً، نستخدم البرمجية الحرة $\mathtt{DuMu}^{x}$ لتقديم تجارب عددية في بعدين، تحاكي جريان سائل ثنائي الطور (زيت وماء) في وسط مسامي وهذا باستخدام بيانات لمكمن حقيقي للمحروقات.

Abstract

In this work, we present a numerical method for a two-phase flow model for an incompressible and immiscible fluid in heterogeneous and anisotrop media.

This method has applications in the secondary oil recovery.

We give and analyze a finite volume scheme to discretize a boundary value and initial condition problem associated with a system involving an elliptic and coervive equation (for pressure) coupled with a degenerate parabolic convection-diffusion equation (for saturation).

The elliptical equation is discretized using a hybrid finite volume scheme.

The degenerate parabolic equation is discretized by using an implicit scheme in time and approaching the diffusive flux by the method of hybrid finite volume (this permit to handle the case of an anisitropic and heterogeneous permeability tensor on very general mesh).

The convective flux (which may be discontinuous and non-monotonic with respect of spatial variables) is processed by a Godunov's type scheme.

We prove the existence of approximate solutions which converge to a weak solution to the continuous problem.

We present numerical tests in one dimension using programs written in `C++` language.

Finally, in two dimensions, we present numerical tests using the free simulator `DuMu`$^{\texttt{x}}$ for a two-phase flow (oil-water) in porous media with real parameters of an oil reservoir.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions une méthode numérique pour discrétiser un modèle d'écoulements diphasiques incompressibles et immiscibles en milieu poreux hétérogènes et anisotropes.

Cette méthode possède des applications dans les problèmes de récupération secondaire du pétrole.

Le modèle qui nous intéresse consiste en un problème aux limites et à la condition initiale associées à un système formé d'une équation elliptique coercitive (pour la pression) couplée avec une équation parabolique dégénérée de convection-diffusion (pour la saturation).

L'équation elliptique est discrétisée en utilisant un schéma de volumes finis hybrides. Quant à l'équation parabolique dégénérée, elle est discrétisée en utilisant un schéma implicite en temps et en approchant les flux diffusifs par la méthode des volumes finis hybride (ce qui permet de traiter le cas d'un tenseur de perméabilité anisotrope et hétérogène sur un maillage très général).

Les flux convectifs (qui peuvent être non monotones et discontinus par rapport aux variables spatiales) sont traités par un schéma de type Godunov.

Nous démontrons l'existence de solutions discrètes qui convergent vers une solution faible du problème continu.

Nous présentons des tests numériques unidimensionnels utilisant des programmes écrits en language évolué `C++`.

Finalement, en utilisant le logiciel libre `DuMu`$^{\texttt{x}}$, nous présentons des tests numériques en deux dimensions simulant l'écoulement diphasique eau-huile dans un milieu poreux réalisés avec des paramètres réels de réservoir.