

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Normale Supérieure

Kouba, Alger



**Mémoire présenté pour obtenir le grade de magister**

**Par : Ilias LAIB**

Spécialité : Mathématiques

Option : Algèbre et théorie des nombres

---

## **SUR LES NOMBRES DE PISOT**

---

**Soutenu le 26/05/2016 à 08 : 00**

**Devant le jury :**

<b>Mr. Djilali BENAYAT</b>	Professeur, ENS KOUBA	Président
<b>Mr. Abdallah DERBAL</b>	Professeur, ENS KOUBA	Examineur
<b>Mr. Djilali BEHLOUL</b>	Professeur, USTHB	Examineur
<b>Mr. Rachid MECHIK</b>	M.C.A, USTHB	Directeur de mémoire

# Table des Matières

Remerciements

Résumé

Notations 1

Introduction 3

**1 Préliminaires 5**

1.1 Définitions et rappels . . . . . 5

1.1.1 Corps des fractions rationnelles . . . . . 7

1.1.2 Rationalité des séries formelles . . . . . 7

1.1.3 Séries entières . . . . . 10

1.1.4 Fonctions analytiques . . . . . 11

1.1.5 Fonctions holomorphes . . . . . 14

1.1.6 Pôles et résidus . . . . . 14

**2 La répartition modulo 1 16**

2.1 Equirépartition . . . . . 16

2.1.1 Le critère de Weyl . . . . . 17

2.1.2 Mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}$  . . . . . 22

2.1.3 Théorème de Koksma . . . . . 23

<b>3</b>	<b>Les nombres de Pisot</b>	<b>31</b>
3.1	L'ensemble <b>U</b> . . . . .	31
3.2	L'ensemble <b>S</b> . . . . .	38
3.2.1	Une caractérisation des nombres de Pisot . . . . .	38
3.3	Annexe: Quelques nombres de Pisot inférieurs à 1.6 . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Une autre approche des nombres de Pisot</b>	<b>43</b>
4.1	Développement d'un entier naturel en base $\varphi$ . . . . .	43
4.1.1	Application $\varphi$ -additive . . . . .	45
4.1.2	Application $\varphi$ -multiplicative . . . . .	46
4.2	Caractérisation de certains nombres de Pisot . . . . .	47

# Notations

1.  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  : désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.
2.  $\mathbb{Z}$  : désigne l'anneau des entiers rationnels ou relatifs.
3.  $\mathbb{Q}$  : désigne le corps des nombres rationnels.
4.  $\mathbb{R}$  : désigne le corps des nombres réels.
5.  $\mathbb{C}$  : désigne le corps des nombres complexes.
6.  $A$  : désigne un anneau commutatif et unitaire.
7.  $V \setminus \Omega$  : désigne l'ensemble des éléments de  $V$  que ne sont pas dans  $\Omega$ .
8.  $D(z_0, r)$  : désigne un disque ouvert, de centre  $z_0$  et de rayon  $r$ .
9.  $\overline{D}(z_0, r)$  : désigne un disque fermé, de centre  $z_0$  et de rayon  $r$ .
10.  $\log$  : désigne le logarithme népérien.
11.  $E(x)$  : désigne la partie entière de  $x$ .
12.  $\{x\}$  : désigne la partie fractionnaire de  $x$ .
13.  $E'(x)$  : désigne l'entier le plus proche de  $x$  i.e.

$$E'(x) = \begin{cases} E(x), \{x\} < \frac{1}{2} \\ E(x) + 1, \{x\} \geq \frac{1}{2} \end{cases} ; \text{ ainsi: } E'(1.4) = 1; E'(1.6) = 2$$

14.  $\|x\|$  : désigne la distance du nombre réel  $x$  à l'entier le plus proche i.e.

$$\begin{aligned}\|x\| &= \left| x - E'(x) \right| = \min \{ |x - n|, n \in \mathbb{Z} \} \\ &= \min \{ \{x\}, 1 - \{x\} \}.\end{aligned}$$

On a pour deux nombres réels  $x_1, x_2$  et un entier  $n$

$$\begin{aligned}\|x_1 + x_2\| &\leq \|x_1\| + \|x_2\|, \\ \|nx_1\| &\leq |n| \|x_1\|.\end{aligned}$$

15. Étant donné un nombre réel  $x$ , nous pouvons écrire  $x$  sous la forme:

$$x = E'(x) + \varepsilon(x) \text{ avec } \frac{-1}{2} \leq \varepsilon(x) < \frac{1}{2}.$$

16. Pour deux nombres entiers  $n$  et  $k$  tels que  $0 \leq k \leq n$  on note

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

17. Si  $f(x)$  et  $g(x)$  deux fonctions définies sur  $[x_0, +\infty[$  et  $g(x) > 0$  pour  $x \geq x_0$ , alors

$$f(x) = O(g(x)) \text{ signifie } (\exists M > 0) \text{ tel que } |f(x)| \leq Mg(x) \text{ } (\forall x \geq x_0)$$

$$\left( \limsup \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty \right) \text{ } (f(x) \text{ est un grand O de } g(x))$$

$$f(x) = o(g(x)) \text{ signifie } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0 \text{ } (f(x) \text{ est un petit o de } g(x))$$

$$f(x) \sim g(x) \text{ signifie } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 1 \text{ } (f \text{ équivalente à } g \text{ au } V(+\infty))$$

Ces notations seront aussi valables dans un voisinage  $V(x_0)$ , avec  $x_0 \neq +\infty$ .

# ملخص

نقول عن متتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  إنها موزعة بانتظام بترديد 1 إذا كان من اجل كل ثنائية  $a < b$  من المجال  $[0, 1]$  ، المتتالية ذات الحد العام  $\varphi(n) = \text{Card}\{k \in \mathbb{N}, k < n, a \leq \{u_k\} \leq b\}$  مكافئة تقريبا للعدد  $n(b - a)$ .

نحتاج في دراسة اعداد *Pisot* إلى المجموعات التالية:  
1. المجموعة:

$$E = \left\{ \begin{array}{l} \alpha > 1 / (\alpha, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \\ \text{المتتالية } (\lambda \alpha^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ غير موزعة بانتظام بترديد 1} \end{array} \right\}$$

2. المجموعة:

$$U \subset E$$

حيث  $\alpha$  عدد جبري، طويلة مرافقاته أصغر من أو يساوي 1.  
3. المجموعة:

$$S \subset U$$

حيث طويلة مرافقات  $\alpha$  أصغر تماما من 1.

# Résumé

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite équirépartie modulo 1 si pour tout couple de réels  $a < b$  de  $[0, 1]$ , la suite d'entiers de terme général  $\varphi(n) = \text{Card}\{k \in \mathbb{N}, k < n, a \leq \{u_k\} \leq b\}$  est asymptotiquement équivalente à  $n(b - a)$ .

On a besoin, dans l'étude des nombres de Pisot, des ensembles suivants:

1. L'ensemble

$$E = \{\alpha > 1 / \text{ la suite } (\lambda \alpha^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ non équirépartie (mod 1), } (\alpha, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*\}.$$

2. L'ensemble

$$\mathbf{U} \subset E,$$

où  $\alpha$  est un entier algébrique dont les conjugués sont de module inférieur ou égal à 1.

3. L'ensemble

$$\mathbf{S} \subset \mathbf{U},$$

dans lequel les conjugués de  $\alpha$  sont de module strictement inférieur à 1.

**Mots-clés :** Nombre de Pisot, équirépartition, le théorème de Koksma, application  $\varphi$ -additive ou  $\varphi$ -multiplicative.