République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Normale Supérieure

Kouba, Alger

**Mémoire présenté pour obtenir le grade de magister**

**Par :** Ilias LAIB

Spécialité : Mathématiques

Option : Algèbre et théorie des nombres

# SUR LES NOMBRES DE PISOT

**Soutenu le** 26/05/2016 **à** 08 : 00

**Devant le jury :**

| | | |
|---|---|---|
| **Mr. Djilali BENAYAT** | Professeur, ENS KOUBA | Président |
| **Mr. Abdallah DERBAL** | Professeur, ENS KOUBA | Examinateur |
| **Mr. Djilali BEHLOUL** | Professeur, USTHB | Examinateur |
| **Mr. Rachid MECHIK** | M.C.A, USTHB | Directeur de mémoire |

# Table des Matières

# Notations

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$ : désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.

2. $\mathbb{Z}$ : désigne l'anneau des entiers rationnels ou relatifs.

3. $\mathbb{Q}$ : désigne le corps des nombres rationnels.

4. $\mathbb{R}$ : désigne le corps des nombres réels.

5. $\mathbb{C}$ : désigne le corps des nombres complexes.

6. $A$ : désigne un anneau commutatif et unitaire.

7. $V \backslash \Omega$ : désigne l'ensemble des éléments de $V$ que ne sont pas dans $\Omega$.

8. $D(z_0, r)$ : désigne un disque ouvert, de centre $z_0$ et de rayon $r$.

9. $\overline{D}(z_0, r)$ : désigne un disque fermé, de centre $z_0$ et de rayon $r$.

10. log : désigne le logarithme népérien.

11. $E(x)$ : désigne la partie entière de $x$.

12. $\{x\}$ : désigne la partie fractionnaire de $x$.

13. $E'(x)$ : désigne l'entier le plus proche de $x$ i.e.

$$E'(x) = \begin{cases} E(x), \{x\} < \frac{1}{2} \\ E(x) + 1, \{x\} \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \text{ ; ainsi: } E'(1.4) = 1; \ E'(1.6) = 2$$

14. $\|x\|$ : désigne la distance du nombre réel $x$ à l'entier le plus proche i.e.

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left|x - E'(x)\right| = \min\{|x-n|,\ n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \min\{\{x\}, 1-\{x\}\}. \end{aligned}$$

On a pour deux nombres réels $x_1$, $x_2$ et un entier $n$

$$\begin{aligned} \|x_1 + x_2\| &\leq \|x_1\| + \|x_2\|, \\ \|nx_1\| &\leq |n|\,\|x_1\|. \end{aligned}$$

15. Étant donné un nombre réel $x$, nous pouvons écrire $x$ sous la forme:

$$x = E'(x) + \varepsilon(x) \text{ avec } \frac{-1}{2} \leq \varepsilon(x) < \frac{1}{2}.$$

16. Pour deux nombres entiers $n$ et $k$ tels que $0 \leq k \leq n$ on note

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

17. Si $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions définies sur $[x_0,\ +\infty[$ et $g(x) > 0$ pour $x \geq x_0$, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{O}(g(x)) \text{ signifie } (\exists M > 0) \text{ tel que } |f(x)| \leq Mg(x) \ (\forall x \geq x_0) \\ & \quad \left(\limsup \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty\right) \ (f(x) \text{ est un grand O de } g(x)) \\ f(x) &= \mathrm{o}(g(x)) \text{ signifie } \lim_{x \to +\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0 \ (f(x) \text{ est un petit o de } g(x)) \\ f(x) &\sim g(x) \text{ signifie } \lim_{x \to +\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 1 \ (f \text{ équivalente à } g \text{ au } V(+\infty)) \end{aligned}$$

Ces notations seront aussi valables dans un voisinage $V(x_0)$, avec $x_0 \neq +\infty$.

# ملخّص

نقول عن متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها موزعة بانتظام بترديد $1$ إذا كان من اجل كل ثنائية $a<b$ من المجال $[0,1]$ ، المتتالية ذات الحد العام $\varphi(n)=Card\{k\in\mathbb{N},\ k<n,\ a\leq\{u_k\}\leq b\}$ مكافئة تقاربيا للعدد $n\,(b-a)$.

نحتاج في دراسة اعداد $Pisot$ إلي المجموعات التالية:

1. المجموعة:

$$E=\left\{\begin{array}{c}\alpha>1/\,(\alpha,\lambda)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\\ \text{المتتالية } (\lambda\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ غير موزعة بانتظام بترديد } 1\end{array}\right\}$$

2. المجموعة:

$$\mathbf{U}\subset E$$

حيث $\alpha$ عدد جبري، طويلة مرافقاته أصغر من أو يساوي $1$.

3. المجموعة:

$$\mathbf{S}\subset\mathbf{U}$$

حيث طويلة مرافقات $\alpha$ أصغر تماما من $1$.

# Résumé

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite équirépartie modulo 1 si pour tout couple de réels $a < b$ de $[0,1]$, la suite d'entiers de terme général $\varphi(n) = Card\{k \in \mathbb{N},\ k < n,\ a \leq \{u_k\} \leq b\}$ est asymptotiquement équivalente à $n\,(b-a)$.

On a besoin, dans l'étude des nombres de Pisot, des ensembles suivants:

1. L'ensemble

$$E = \{\alpha > 1/ \text{ la suite } (\lambda\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ non équirépartie (mod1)},\ (\alpha,\lambda) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\}.$$

2. L'ensemble

$$\mathbf{U} \subset E,$$

où $\alpha$ est un entier algébrique dont les conjugués sont de module inférieur ou égal à 1.

3. L'ensemble

$$\mathbf{S} \subset \mathbf{U},$$

dans lequel les conjugués de $\alpha$ sont de module strictement inférieur à 1.



**Mots-clés :** Nombre de Pisot, équirépartition, le théorème de Koksma, application $\varphi$-additive ou $\varphi$-multiplicative.