République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Normale Supérieure

Kouba, Alger

**Mémoire présenté pour obtenir le grade de magister**

**Par :** Siham BOUMARAF

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et numérique

# Solutions très faibles d'équations aux dérivées partielles stationnaires. Application à un problème de mouvement d'un fluide.

**Sous la direction de** Monsieur El hacène OUAZAR, M.C.A *à* ENS-Kouba

**Soutenu le 4 Février 2016**

**Devant le jury :**

| | | |
|---|---|---|
| **Mr A. Mokrane,** | Professeur, ENS, Kouba | Président |
| **Mr T. Moussaoui,** | Professeur, ENS, Kouba | Examinateur |
| **Mr B. Bougherara,** | M.C.B, ENS, Kouba | Invité |
| **Mr H. Ouazar,** | M.C.A, ENS, Kouba | Directeur de mémoire |

# Table des matières

# ملخّص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة وجود الحلول لمسائل حدية تفاعل " سائل – هيكل " غير متعلقة بالزمن في البعد 3 .

هذا العمل يعتمد على مقال لـ سيلين غراندمنت ( Céline Grandmont ) [8] تحت عنوان " Three-dimensional steady state fluid-structure interaction problem " .

قسمنا هذه المذكرة إلى فصلين :

يتناول الفصل الأول بعض المفاهيم والنتائج التي سوف نستخدمها في الفصل التالي مثل : تعريف العامل سان فنو – كيرشوف ( St Venant-Kirchhoff )، فضاءات سوبولاف ( Sobolev ). نحتاج كذلك إلى التذكير بنظرية الأثر، نظرية الانتظام لمعادلة ستوكس ( Stokes )، نظرية التوابع الضمنية، بعض نظريات النقطة الصامدة، صيغة ڤرين ( Green )، متراجحة كورن ( Korn )، متراجحة بوانكاريه ( Poincaré )، و كذلك إلى بعض التعاريف المستعملة غالبا في الحقول الشعاعية و موتر المرونة الخطية.

أما الفصل الثاني فينقسم إلى 3 أجزاء. الجزء الأول يتضمن دراسة وجود و وحدانية الحل لمعادلة ستوكس ( Stokes ) ثم معادلة نافييه – ستوكس ( Navier-Stokes ) . الجزء الثاني يتضمن دراسة وجود و وحدانية الحل لمعادلة الهيكل ; أما الجزء الاخير يتضمن دراسة وجود على الأقل حل لمسألة تفاعل " سائل – هيكل " .

# Résumé

L'objectif de ce travail est d'étudié l'existence des solutions d'un problème aux limites d'interaction fluide structure stationnaire en trois dimensions.

Ce mémoire est basé sur le travail de Céline Grandmont intitulé "Existence for a three-dimensional steady state fluid-structure interaction problem" [8].

Le travail est divisé en deux chapitres de la manière suivante :

le premier chapitre est consacré à rappeler certains résultats qui seront utilisés dans le chapitre suivant. Par exemple : la définition des matériaux de St Venant-Kirchhoff, les espaces de Sobolev $W^{m;p}(\Omega)$, on aura besoin aussi d'énoncer des théorèmes de traces, l'inégalité de Poincaré et l'inégalité de Korn, le théorème de la régularité du problème de Stockes, la formule de Green, ainsi que quelques notations de champs de vecteurs et tenseurs utilisées couramment en élasticité linéaire, le théorème des fonctions implicites et quelques théorèmes de point fixe.

Le deuxième chapitre, est composé de trois parties. La première partie est consacrée à l'étude des équations de Stokes, ensuite les équations de Navier-Stokes. La seconde partie est consacrée à l'étude des équations de la structure ; la dernière partie est consacrée à la démonstration de l'existence d'au moins une solution régulière pour le problème d'interaction fluide-structure.

# Abstract


The objective of this work is to find solutions to the problem of steady fluid structure interaction in three dimensions.

This memory is based on the paper of Celine Grandmont under the title "Existence for a three-dimensional steady state fluid-structure interaction problem"[8].

This work is divided into two chapters :

the first chapter is devoted to recall some results that will be used in the following chapter. For example the Sobolev space $W^{m;p}(\Omega)$, we also need to state the inequality of Poincaré and the inequality of Korn, some fixed point theorems.

The second chapter, is broken down into three parties. The first party is devoted to the study of the Stokes equations, then the Navier-Stokes equations. The second party is devoted to the study of the structure type equations, finally we will prove the existence of at least one regular solution fluid-structure interaction problem.

# Notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

$\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s$ un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$.

$\Omega_f$ domaine occupé par le fluide.

$\Omega_s$ domaine de la structure.

$\partial\Omega_f =$ frontière de $\Omega_f$.

$\partial\Omega_s =$ frontière de $\Omega_s$.

$\Gamma_{fs} = \partial\Omega_f \cap \partial\Omega_s =$ la surface de contact entre le fluide et la structure.

$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

$\mathrm{div}\ u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$.

$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

$A : B = \mathrm{tr} A^t B = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$.

$\mathcal{C}^0(\Omega)$ l'espace des fonctions continues, $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\mathcal{C}^1(\Omega)$ espace des fonctions continues avec leurs dérivées premières.

$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}$ où $p \in [1, +\infty[$.

$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ mesurable et } \exists\ c \geq 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq c, \text{ p.p. sur } \Omega \right\}$.

$\|f\|_{L^p} = \left( \displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ où $p \in [1, +\infty[$.

$\|f\|_{L^\infty} = \inf \left\{ c > 0;\ |f(x)| \leq c; \text{ p.p. sur } \Omega \right\}$.

$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) \text{ et } D^\alpha f \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq m \right\}$.

$W_0^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in W^{m,p}(\Omega) /\ D^\alpha f \equiv 0 \text{ sur } \partial\Omega,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq m - 1 \right\}$.

$H^m(\Omega) = W^{m;2}(\Omega)$.

$H_0^m(\Omega) = W_0^{m;2}(\Omega)$.

$\|f\|_{H_0^1(\Omega)} = \left( \int_\Omega |\nabla f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

$H^{-m}(\Omega) =$ dual de $H_0^m(\Omega)$.

$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{z} \in H_0^1(\Omega_f), \quad \mathrm{div}(\mathbf{B}^t \mathbf{z}) = 0 \right\}$.

$\overline{\sigma}(\mathbf{u})$ tenseur des contraintes.

$\overline{\varepsilon}(\mathbf{u})$ tenseur des déformations.

$\mu$, $\lambda$ constantes de Lamé tels que $\mu > 0$, $\lambda \geq 0$.

$v_n \longrightarrow v$ la convergence forte.

$v_n \rightharpoonup v$ la convergence faible.

$\hookrightarrow$ l'injection.

$a(\cdot, \cdot)$ : forme bilinéaire définie sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

$b(\cdot, \cdot, \cdot)$ forme trilinéaire définie sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

$l(\cdot)$ : forme linéaire définie sur $\mathcal{V}$.