République Algérienne Démocratique Populaire

Ministère de l’Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Ecole Normale Supérieure
Vieux Kouba – Alger
Département de mathématique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
القبة القديمة– الجزائر
قسم الرياضيات

مذكرة لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

المبدأ التغايري لإكلاند و بعض تطبيقاته

من إعداد:
موساوي أمينة
بعيطش أميرة

تحت إشراف:
الأستاذ: موساوي توفيق

لجنة المناقشة :

الأستاذ : بودن كريم..(رئيسا)

الأستاذ : مختاري عبد الحق...............................(ممتحنا)

الأستاذة : بوسنة أمينة......................................(ممتحنة)

الأستاذة : فريطس وداد......................................(ممتحنة)

الأستاذ : موساوي توفيق...................................(مشرفا)

دفعة جوان 2015

المحتويـات

الفصل الثاني

المبدأ التغايري لإكلاند و علاقاته بنظريات أخرى

الفصل الثالث

حل المسألة التغايرية لديريكليه في البعد n

الفصل الرابع

نظريات جديدة حول النقطة الصامدة باستعمال مبدأ إكلاند

الفصل الخامس

تطبيق المبدأ في فضاء ريس ـ بناخ

الفصل السادس

نظرية حول النقطة الصامدة في فضاءات هلبرت

ترميزات

في كل ما يأتي، نستعمل الرموز التالية:

$\Vert.\Vert$	النظيم.
$(.,.)$	الجداء السلمي.
E^*	الثنوي الطبولوجي.
$\langle .,. \rangle$	قوسي التوزيع بين E و ثنويه.
$diam(S_n)$	قطر (S_n)
$(P.S)$	شرط بالي ـ سمايل.
$\hookrightarrow$	إذا E و F فضاءين نظيميين، نكتب $E \hookrightarrow F$ لدلالة على أن E محتوى في F و أن التباين القانوني من E في F مستمر.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	لدلالة على أن E محتوى في F و أن التباين القانوني من E في F متراص.
$\sup\limits_E$	الحد الأعلى على E.
$\inf\limits_E$	الحد الأدنى على E.
u^+	الدالة المعرفة بـ $u^+ = \sup\{u, 0\}$.
u^-	الدالة المعرفة بـ $u^- = -\inf\{u, 0\}$.
$u \wedge v$	هو $\inf\{u, v\}$.
$u \vee v$	هو $\sup\{u, v\}$.
E^+	هو $\{u \in E \ : \ 0 \leq u\}$.
K^c	هي متممة K بالنسبة للمجموعة الكلية.
$u_n \to u$	أي أن المتتالية $(u_n)_n$ تتقارب نحو u بالنظيم.
$u_n \rightharpoonup u$	أي أن المتتالية $(u_n)_n$ تتقارب بضعف نحو u.
$d\varphi$	المشتق بمفهوم فريشي.
$D\varphi$	المشتق بمفهوم قاتو.

2^*	القوة الحرجة لسوبولاف $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ حيث N هو بعد الفضاء.
$grad\varphi$	تدرج φ و نرمز له كذلك بـ $\nabla\varphi$ حيث $\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$.
Δu	مؤثر لابلاس و هو معرف كالآتي $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}$.
$\overline{U}$	ملاصقة U.
$\partial B(0,R)$	حافة الكرة ذات المركز 0 و نصف القطر R.
$C^0(\Omega)$	فضاء التوابع المستمرة على Ω.
$C^1(\Omega)$	فضاء التوابع المستمرة على Ω، و القابلة للإشتقاق و المشتق مستمر.
$L^p(\Omega)$	هو فضاء التوابع $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ القيوسة على Ω و التي تحقق $\int_\Omega \lvert f(x)\rvert^p dx < +\infty$ مع $1 < p < \infty$.
$H^1(\Omega)$	$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \quad \nabla u \in L^2(\Omega)\}$.
$H_0^1(\Omega)$	$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \quad u_{\lvert\partial\Omega} = 0\}$.
$W^{m,p}(\Omega)$	$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m-1,p}(\Omega), \ \nabla u \in W^{m-1,p}(\Omega)\}$.
$W_0^{m,p}(\Omega)$	$W_0^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{m,p}, \ u_{\lvert\partial\Omega} = 0\right\}$.
شك	شبه كليا.

مقدمــة

سؤالان إعتياديان يتبادران إلى الذهن عند دراسة مشكل التصغير، مسألة وجود الحد الأدنى و الخصائص التي يحققها. عادة بلوغ تابع φ قابل للمفاضلة حده الأدنى عند نقطة u_0 ينتج عنه إنعدام المشتق عند هذه النقطة. فإذا كان φ محدود من الأدنى (ليس بالضرورة يدرك حده الأدنى)، إذن من أجل كل ε يوجد حل تقريبي u_ε للمعادلة $\varphi'(u) = 0$ و يحقق

$$\inf \varphi \leq \varphi(u_\varepsilon) \leq \inf \varphi + \varepsilon$$

- ما هي الشروط الضرورية التي تحققها هذه الحلول التقريبية؟

للإجابة على هذا السؤال و أسئلة أخرى تتعلق بوجود النقطة الصامدة، النقطة الحرجة و وجود الحل الضعيف لمسائل حدية غير خطية، قدم إيفار إكلاند (*Ivar Ekeland*) مبدؤه التغايري.

منذ ظهوره عام 1972، عاد هذا المبدأ بفوائد هامة في مختلف ميادين الرياضيات من بينها التحليل غير الخطي، تطبيقات هندسة فضاءات بناخ، الحساب التفاضلي العام، فهو وسيلة قوية في التحليل التطبيقي، أيضا هو قوي دون شك في تكنولوجيا التقريبات المتعاقبة للنقطة الصامدة.

نظرًا لأهمية المبدأ التغايري لإكلاند وقع اختيارنا على دراسته و إبراز بعض تطبيقاته في مذكرتنا هذه، التي تضم ستة فصول.

سنقدم في الفصل الأول أهم المفاهيم المستعملة في النظريات الأساسية و أخرى تم الإشارة إليها. فالمبدأ التغايري لإكلاند يُطَبَق إذا و فقط إذا كان الفضاء المتري تام لذا سنقدم تعريف كل من الفضاء الطبولوجي، الفضاء المتري و المتري التام الذي يرتبط بتقارب المتتاليات الكوشية و نظرًا لكون الفضاء الشعاعي النظيمي هو فضاء متري، سنتطرق إلى دراسة مختلف أنواع تقارب المتتاليات و أهم النظريات الأساسية كنظرية الهيمنة للوبيغ.

سنقدم أيضًا تعريف لكل من الفضاء الهلبرتي و الفضاء الإنعكاسي و العلاقة بينهما. كما لا يخفى علينا أنه من بين أهم الخصائص المميزة و المساعدة على دراسة تابع ما، الإستمرارية و قابلية المفاضلة لذا سنوضح من جهة مفهوم الإستمرارية و نصف الإستمرارية للمؤثرات و التوابع (كما سنشير إلى التكافؤ الموجود بين محدودية المؤثرات الخطية و استمراريتها)، ومن جهة أخرى سنتطرق إلى قابلية المفاضلة بمفهوم فريشي و بمفهوم قاتو و العلاقة بينهما.

سَنُدرِج في هذا الفصل أيضًا نظريات و مفاهيم سنعتمد عليها في الفصول الموالية مثل التباين بالإستمرار، التباين المتراص، متباينة بوانكاري، متباينة سوبولاف، توطئة كانتور، نظرية بناخ ألوقلو و كذا مفهوم تابع قسري؛ كما ستتكرر عملية البحث عن المشتق في معظم الفصول مما سيؤدي بنا إلى إبراز ذلك على شكل

مثال توضيحي.

لنتوجه إلى الفصل الثاني أين سنتناول المبدأ التغايري لإكلاند بصيغتيه القوية و الضعيفة و مبدأ التصغير الناتج عنه مع براهين مفصلة مستندين في ذلك على علاقة الترتيب، توطئة كانتور و استمرار التوابع الخطية.
و سيكون علينا تقديم شرط بالي - سمايل لوجود علاقة وطيدة بين المبدأ التغايري لإكلاند و المحدودية.

و بشروط مماثلة لتلك الموجودة في المبدأ التغايري لإكلاند سنعرض توطئة بيشوب - فيلبز ببرهانها المفصل و نظرية كاريستي التي سنثبتها بطريقتين مرة باستعمال توطئة بيشوب - فيلبز و مرة أخرى باستعمال المبدأ التغايري لإكلاند، كما سنوضح كيف أنه بفضل المبدأ التغايري الضعيف لإكلاند سيكون من السهل علينا برهان نظرية كاريستي في حالة تابع متعدد القيم.
و مع أن المبدأ التغايري لإكلاند لم يُعلن عليه كنظرية للنقطة الصامدة إلّا أنه كذلك، ففي نهاية فصلنا الثاني سنبرهن نظرية النقطة الصامدة لبناخ بتطبيق مباشر للمبدأ كما سنبرهن هذه النظرية بتطبيق نظرية كاريستي.

أصبح إستعمال المبدأ التغايري لإكلاند أكثر نجاحًا في حل المسائل التغايرية، لذلك أَبَينَا إلّا أن نظهر ذلك في فصلنا الثالث من خلال حل مسألة ديريكليه بالإعتماد على المبدأ التغايري لإكلاند.

أما في الفصل الرّابع فسنبين كيف أنّ المبدأ التغايري لإكلاند يُعتَبَرُ أحد الوسائل الهامة في نظرية النقطة الحرجة و التحليل غير الخطي بدون استعمال شرط $(P.S)$.

لنغير الوجهة في الفصل الخامس أين سنعتمد على فضاء بناخ مرتب ألا و هو فضاء ريس - بناخ لإثبات مبدأ التصغير لإكلاند فيه، ثم نطبقه لبرهان وجود الحل الموجب لمسائل حدية غير خطية.

لنختم بحثنا هذا بفصل يضم نظريات جديدة حول النقطة الصامدة في فضاء هلبرتي مستعملين المبدأ التغايري الضعيف لإكلاند و سنطبق هذه النظريات لإيجاد الحلول الضعيفة لمسألة حدية لديريكليه.