

Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique  
Ecole Normale Supérieure  
Vieux Kouba – Alger  
Département de mathématiques



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
المدرسة العليا للأساتذة  
القبة القديمة – الجزائر  
قسم الرياضيات

## تاريخ نشأة فضاءات $L^p(\cdot)(\Omega)$

# مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

تحت إشراف الأستاذ:

✦ عبد العزيز هلال

من إعداد:

✦ لعاج سفيان  
✦ طابير صدام حسين

### لجنة المناقشة:

- الأستاذ: خليفي هشام (أ.م.ع. القبة) رئيسا.
- الأستاذ: بن يوب محمد (أ.م.ع. الأغواط) ممتحنا.
- الأستاذ: عبد العزيز هلال (أ.م.ع. القبة) مشرفا.

السنة الجامعية: 2014-2015

دفعة جوان 2015.

## الفهرس

## مقدمة

## الفصل الأول : تعاريف و عموميات

09	1.1 الفضاءات الطوبولوجية
11	2.1 الفضاءات المترية
12	3.1 الفضاءات الشعاعية النظيمية
15	4.1 الفضاءات البناحية
16	5.1 الفضاءات الهلبرتية
17	6.1 التوبع المحدبة
18	7.1 الفضاءات و التوابع القيوسة
20	8.1 تكامل ريمان
22	9.1 فضاءات لوبيغ

## الفصل الثاني : فضاءات لوبيغ المعممة

29	1.2 تاريخ نشأة فضاء الأس متغير
32	2.2 التعريف ب <i>Orlicz</i>
34	3.2 فضاءات لوبيغ المعممة

الفصل الثالث : متبايتي هولدار في  $\mathbb{L}^{p(\cdot)}(\Omega)$ 

56	1.3 دراسة متباينة هولدار
60	2.3 دراسة التباين
61	3.3 أمثلة

## خاتمة

## الملاحق

68	دليل المصطلحات
71	المراجع

الجزء حـ

مقدمة

## 1 - 1 - مقدمة :

إن التطور الهائل في الرياضيات أدى بالباحثين إلى التخصص أكثر في فرع معين في الرياضيات و هذا ما شهدته الدراسات التي أجراها الرياضيون فيما يخص فضاء الدوال ذات الأس متغير فأسفرت عن 15 بحث (رسالة علمية) قبل عام 2000 ، 31 بحث (رسالة علمية) بين عامي 2000 و 2004 و 242 مقالا علميا بين عامي 2005 و 2010 . وكل ذلك كان بعد إنشاء الفضاءات  $L^p$   $p \in [1, +\infty]$  ولكن كان هذا العمل في حاجة إلى تطوير أكثر لأنه مازال لا يحقق بعض النظريات، وبعد إكتشاف  $L^{p(x)}$  مع  $p$  تابع من  $\mathbb{R}^N$  في  $[1, +\infty]$  تطورت بعض المفاهيم و وجدوا أن الذي لم يكن محققا في سابقه أصبح محققا الآن، كما قاموا بإثبات أن بعض المتباينات محققة في هذا الفضاء مثل متباينة هولدار *holder* . مع العلم أنه تحت شروط معينة أثبتوا أن هذه الفضاءات هي فضاءات تامة و تتمتع بعدة خواص مثل التي نجدها في حالة  $p$  ثابت.

أغلب النتائج الواردة في هذه المذكرة موجودة منذ أكثر من عشر سنوات من القدم. ويستند اختيارنا لبعض من المواضيع إلى حد ما على إحتياجاتنا، و لكن حاولنا أن تشمل على جميع النتائج المهمة و العامة.

و حلت إلى حد كبير العديد من المساهمات في وقت مبكر جدا من قبل أكثر النتائج حداثة، وبذلك ندرج هنا تاريخا موجزا لهذا الفضاء منذ إنشائه في عام 1931 إلى ما يقرب من عام 2000 .

و سنعرض في الفصل الأول من المذكرة بعض التعاريف و النظريات و الخصائص التي نستخدمها في الفصل الثاني و الثالث ، و أما الفصل الثاني فسوف نعرف بمكتشف هذا الفضاء ثم نبذة تاريخية لنشأة هذا الفضاء بعدها سنستعرض فضاء لوبيغ المعمّم و بعض النظريات وأهم النتائج المحصل عليها. ونختم المذكرة بمثال يتمثل في متباينة هولدر وبعض الأمثلة الأخرى.