الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

المدرسة العليا للأساتذة

– القبة – الجزائر

قسم الرياضيات

École Normale Supérieure

-kouba- Alger

Département de Mathématique

مذكرة لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

دراسة نظرية و تحليلية و عددية لنموذج Kermak Mckendrick لعمر الإصابة بالعدوى

من إعداد الطلبة:

- الرمة بختة
- زميش سكينة

تحت إشراف

الأستاذ:

بوسعدة مراد

لجنـــة المناقشــــة

الأستاذ: .بودن كريم.. رئيسا

الأستاذ:. بوسعدة مراد.. . مشرفا

الأستاذ: مختاري عبد الحق.......................................ممتحنا

السنة الدراسية:2015/2014

اَلْفَهْرَسْ

مقدمة

إذا كان أحد فروع علم الاحصاء يصف التغيرات لتكرر الأمراض في المجموعات البشرية و يبحث عن محددات هذه التغيرات و العوامل المسببة لها ،كما يشير إلى فهم أسباب الأمراض ، و تحسين علاجها و طرق الوقاية منها .

المرض المعدي هو مرض ناتج عن إنتقال الأجسام المجهرية كالبكتيريا ، الفيروسات ، الفطريات ، الطفيليات ...

من بين الأمراض المعدية الأكثر إنتشارا و الأكثر تجاوبا نستذل بـ الأمثلة : مرض السل ، السيدا ، حمى المستنقعات ...

و السؤال الذي يطرح نفسه هو : ماهي علاقة الرياضيات بهذا العلم ؟ نستطيع الاجابة عنها كالآتي :

نبدأ بتجميع المعطيات (الوباء ، عدد المرضى ، الوقت الازم للشفاء ، نسبة عدد الوفات ...) بعبارة أخرى الأرقام .

و ذلك بنمذجة هاته الثوابت لمعرفة تحويل مشكل معين آت من عالم حقيقي إلى مشكل رياضي ، و بعدها ننتقل إلى حل و تحليل العينة هذا ما يسمح بالفهم و التنبء ثم العمل ...

التلقيح يطرح كذلك حاليا مشاكل جديدة من أجلها تبقى النمذجة الرياضية ضرورية لا يستغنى عنها ، و على سبيل المثال : الاختفاء المبرمج للأمراض يدفع للبحث في ضرورة تكثيف التلقيح أو ايقافه ، الانخفاض السريع لمناعة التلقيح هو أيضا أصل السؤال في الصحة العامة الذي يمكننا دراسته بالنمذجة .

نظرية الوحدانية تم صياغتها بمفهوم نسبة استنساخ الوباء R_0 (التحليل المستعمل هو عدد الحالات المصابة مباشرة من طرف حالة وحيدة مصابة)و تكون في مجموعة سكانية معينة. الحدس و الرياضيون أظهروا أنه عندما يكون R_0 أكبر من 1 يبدأ ظهور الوباء و العكس صحيح عندما يكون R_0 أصغر أو يساوي 1 ، و في المواد الموافقة لهذه الدراسة (كارماك وال 1927 1932 1933) المؤلفون وضعو ما هو معروف اليوم بئسم النموذج (SIR) النموذج الأساسي في شكله الأكثر بساطة (EDO)

هذا النموذج يوافق نظام المعادلة التالية:

$$\begin{cases} S\prime(t) = \lambda - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) \\ I\prime(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ R\prime(t) = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{cases}$$

حيث $S(t)$: يمثل السكان سريعي التأثر في الحظة (t)

$I(t)$: يمثل المصابين

$R(t)$: يمثل المستعصية.

يوجد عدة ثوابت مستخدمة من أجل حساب حيوية هذا العدد من السكان .

λ : ثابت يوافق المواليد (الولادات) في هذه العينة و التي تعتبر كلها سريعة التأثر .

$\frac{1}{\mu}$: تمثل مدة الحياة المتوسطة

$\frac{1}{\lambda}$: تمثل المدة المعدية المتوسطة .

β : يمثل قيمة الالتماس الذي أوصل إلى نقل فعال للمرض .

في هذه المذكرة ندرس النموذج المبني على عمر الوباء حيث نجد أن العدوى و نسبة الانتزاع بامكانهما أن يكون مرتبطان بعمر الوباء

عندما يكون $R_0 \leqslant 1$ يكون التوازن التافه بالاجمال مقارب مستمر

عندما يكون $R_0 > 1$ نستعمل دالة ليابنوف لاثبات أن التوازن الوبائي الوحيد هو بالاجمال مقارب مستقر .

ليكن نموذج $KERMAK - MCKENDRICK$ المطبق في علم الوباء المدروس في هذه المذكرة و المعطى بأكثر تفصيل في الفصول الآتية :

$$\begin{cases} S\prime(t) = \gamma - \nu_s S(t)\eta S(t) \int_0^{+\infty} \beta(a)i(t,a)da \\ \dfrac{a_i(t,a)}{dt} + \dfrac{di(t,a)}{da} = \nu_1(a)i(t,a) \\ i(t,0) = \eta S(t) \int \beta(a)i(t,a)da \\ S(0) = S_0 \geqslant 0, i(0,.) = i_0 \in L^1_{+\infty}(0,+\infty) \end{cases}$$