وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
القبة القديمة (الجزائر)

Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique
Ecole normale supérieure
Vieux Kouba(Alger)

قسم الرياضيات

Département de mathématiques

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي بعنوان :

دراسة بعض الخصائص الأساسية لفضاءات لوبيغ المعممة

من إعداد:

- حسني طيب
- بوعمرة محمد
- ربعي سمير

تحت إشراف الأستاذ:

- د. مختاري فارس

لجنة المناقشة :

- الأستاذ : بوسعدة مراد — أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة – القبة — (رئيسا)
- الأستاذ : عبد العزيز هلال — أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة – الأغواط — (ممتحنا)
- الدكتور: مختاري فارس — أستاذ بالمدرسة العليا للتجارة – القليعة — (مشرفا)

السنة الدراسية : 2014 -2015

دفعة جوان 2015

الحرف	العربية	الفرنسية	الإنجليزية
ـ أ ـ	أس	*Exponant*	*Exponent*
	إتحاد	*Union*	*Union*
ـ ت ـ	تابع	*Fonction*	*Function*
	تابع خطي	*Fonction linéaire*	*Linear function*
	تابع قيوس	*Fonction mesurable*	*Measurable function*
	تابع متزايد	*Fonction croissante*	*Ivcruasing function*
	تابع مستمر	*Fonction continue*	*Continous function*
	تجانس	*Homogéné*	*Homogeneity*
	تشاكل	*Isomorphisme*	*Isomorphism*
	تقارب	*Convergence*	*Convergence*
	تقارب بالقياس	*Convergence en mesure*	*Convergence in measure*
	تقارب معياري	*Convergence modulaire*	*Modular convergence*
	تقارب بالنظيم	*Convergence normal*	*Convergence in norm*
	توطئة	*Lemme*	*Lemma*
ـ ث ـ	ثابت	*Constant*	*Constant*
	ثنوي	*Dual*	*Dual*
ـ ج ـ	جمعي عدود	*Additif comptable*	*Contably additive*
ـ ح ـ	حد أدنى أساسي	*Terms inférieur essentiel*	*Essential infimum*
	حد أعلى أساسي	*Terms supérieur essentiel*	*Essential supremum*
	حقن	*Injection*	*Embedding*
ـ خ ـ	خاصية	*Propriété*	*Property*
ـ س ـ	سلسلة	*Série*	*Serie*
ـ ش ـ	شبه كلي	*Presque partout (p.p)*	*Almost every where (a.e)*
ـ ع ـ	عشيرة	*Tribu*	$\sigma-algebra$
ـ غ ـ	غير محدود	*Non borné*	*Unbounded*
ـ ف ـ	فضاء إنعكاسي	*Espace réflexif*	*Reflexcive space*
	فضاء بناخي	*Espace de Banach*	*Banach space*

	فضاء تام	*Espace complet*	*Complet space*
	فضاء شعاعي	*Espace vectorielle*	*Vector space*
	فضاء لوبيغ المعمم	*Espace de lebesgue géneralisé*	*Variable lebesgue space*
	فضاء نظيمي	*Espace normé*	*Normed space*

- ق -	قضية	*Propisition*	*Propisition*
	قياس	*Mesure*	*Measure*
	قياس موجب	*Mesure positif*	*Positive Measure*
- ك -	كثيف	*Dense*	*Dense*
	كرة مفتوحة	*Boule ouverte*	*Open ball*
- ل -	لازمة	*Corollaire*	*Corollary*
- م -	متباينة	*Inégalité*	*Inquality*
	متتالية	*Suite*	*Sequence*
	متتالية جزئية	*Sous suite*	*Subsequence*
	متتالية كوشية	*Suite de Cauchy*	*Cauchy sequence*
	متتالية متقاربة	*Suite convergent*	*Converge sequence*
	متتالية مجموعات	*Suite d'ensembles*	*Sequence of sets*
	متراص	*Compact*	*Compact*
	مجموعات جزئية	*Sous ensebles*	*Subsets*
	مجموعات منفصلة	*Ensebles disjoint*	*Disjoint sets*
	مجموعة	*Ensemble*	*Set*
	محدب	*Convexe*	*Convex*
	محدود	*Borné*	*Bonded*
	مرافق	*Conjugué*	*Conjugate*
	معياري	*Modulaire*	*Modular*
	مفتوح	*Ouvert*	*Open*
- ن -	نظيم	*Norm*	*Norm*

مقدّمة

إنّ التطور الهائل في الرياضيات أدّى بالباحثين في هذا المجال إلى التعمق أكثر فأكثر في بعض فروع هذا العلم ، وذلك بغية النّهل من معينه والتفيؤ في رياضه والتزود بزاد طيّب يؤهلهم لنفع كل طالب مبتدىء شغوف بهذا الفرع من العلوم.

إنّ من جملة ما أجاد به الرّياضياتيون الباحثون وأفادوا إنشاء فضاءات لوبيغ الكلاسيكية $(1 \leq p \leq \infty, L^p)$ الذي ساعد كثيرا في تطوير البحث في مجال التحليل التّابعي، ونظرا لهذه الأهمية فقد فكّر بعض الرّياضياتيون في توسيع لمفهوم هذه الفضاءات وذلك بدلا من اعتبار p ثابتا في المجال $[1;\infty]$, اعتبروه تابعا معرّفا على جزء من $\mathbb{R}^N$ ويأخذ قيمه في $[1;\infty]$, ثم قاموا بعد ذلك بتعريف الفضاء النّظيمي $L^{p(x)}$ مع p تابع من $\mathbb{R}^N$ في $[1;\infty]$, وهذا الأخير ساهم بشكل كبير في التّوصل إلى إثبات أنّ بعض المتباينات من شكل متباينة مينكوفسكي ومتباينة هولدر محقّقة في هذا الفضاء، ثم إنّه تحت شروط معيّنة تمكنوا من إثبات بعض لخصائص لهذه الفضاءات و التي نجدها في حالة p ثابت.

إنّ فضاءات لوبيغ المعمّمة هذه لها تاريخ طويل يقع تقريبا في تداخل ثلاثة مراحل، حيث قدّمت لأوّل مرّة من طرف $Orlicz$, واعتبرت في العقود التّابعة كأمثلة مهمّة لفضاءات $Musielak-Orlicz$, ثم طوّرت بعد ذلك على نطاق واسع من طرف ثلة من علماء الرّوس نذكر على سبيل المثال لا الحصر $Sharapudinov$,$Teenov$ و $Zikov$ وغيرهم، هؤلاء الذين كان لهم السّبق في النّظر في تطبيقات هذه الفضاءات على بعض المشاكل في التحليل التّابعي وحساب التّغايرات، أمّا المرحلة الثّالثة في دراسة هذه الفضاءات كما جرت العادة في حقول الأبحاث، هي التّفكير في دراسة تأسيسية لهذه الأخيرة والتي ابتدأها $Rakosnik$ و $Kov\acute{a}\check{c}ik$ في 1991, ثمّ طوّرت بشكل واسع من طرف آخرين، ولا يزال البحث والبذل والعطاء متواصلا في هذا الموضوع إلى يومنا هذا.

بعد هذا التّقديم الموجز والمتواضع ننتقل إلى عرض صورة مجملة حول موضوع دراستنا، والذي عنونّاه كالتّالي " دراسة بعض الخصائص الأساسية لفضاءات لوبيغ المعمّمة " والتي قدمناها في ثلاثة فصول نوجز محتواها كالآتي:

في الفصل الأوّل اهتممنا بتقديم جملة من التّعاريف والنّظريات والقضايا حول نظرية القياس والمكاملة، والتي تعتبر سندنا لبيان محتوى الفصلين اللاحقين، كما ذكّرنا ببعض الخصائص المتعلّقة بالفضاءات L^p , $(1 \leq p \leq \infty)$ و الفضاءات الشعاعية والقيوسة.

أمّا الفصل الثّاني فضمنّاه شيئا من التعاريف منها تابع الأس، والتّابع المعياري وجملة من خصائصه مبرهنين عليها، وهذه الأخيرة ستكون بوّابتنا الرّئيسية لإنشاء فضاءات لوبيغ المعمّمة $(L^{p(x)})$, والتي هي هدفنا في هذا الفصل.

أمّا في الفصل الثّالث فحاولنا إلقاء الضوء على بعض الخصائص الأساسية لهذه الفضاءات بدءا بمتباينتي مينكوفسكي وهولدر، دارسين بعد ذلك لنظرية الحقن والتّقارب، ثم دراسة الكثافة والثّنوية والانعكاسية ختاما.