Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure
-Vieux Kouba- (Alger)
Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
– القبة القديمة – (الجزائر)
قسم الرياضيات

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

ترجمة ودراسة لأطروحة بعنوان :

حول الصيغة التغايرية والتقريب العددي لمسألة مخروط الماء في مكمن للبترول

نوقشت هذه الأطروحة في 1977/12/26 من طرف الباحث يوسف عتيق بعنوان :

une formulation variationnelle et approximation numerique
du problème du cône d'eau en regime stationnaire

من إعدادالطالبين :
⋆ بوهالي عبسى
⋆ جبباوي مريم

تحت إشراف الأستاذ :
⋆ يوسف عتيق

لجنة المناقشة :

عبد العزيز شوثري .... رئيسا
يوسف عتيق .... مشرفا
عبد الوهاب بورغدة .... مناقشا

السنة الجامعية : 2015/2014
دفعة جوان : 2015

الفهرس

دليـــل الرمــــــوز

الرمز	معنـــاه
رموز	البــــــــــــــــــــــــــــاب الأول
P_w	الضغط في البئر
$k(z)$	النفاذية
G	المكمن
D	هو في حالة الدوران، مفتوح المستوي المترابط الذي حافته دليل الأسطوانة التي تحتوي المكمن أي $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<r_e^2\}$
$P(x,y,z)$	ضغط الزيت في النقطة (x,y,z) من المكمن
g	تسارع الجاذبية
ρ_0	كتلة الزيت
μ_0	لزوجة الزيت
ϕ	المسامية المحلية
r_w	نصف قطر البئر
Φ_0	كمون السرعة للزيت
Ω	$\{(x,y,z)\in G \mid 0<z<\xi(x,y)\}$
Γ_1	الجدار العمودي للمكمن
Γ_2	$\{(x,y,0) \mid (x,y)\in D \mid x^2+y^2\geq r_w^2\}$
Γ_3	الجدار العمودي للبئر
Γ_4	قاع البئر $\{(x,y,h) \mid x^2+y^2\leq r_w^2\}$
q	تدفق المكمن
Γ_w	$\{(x,y,0)\in\Gamma_2 \mid x^2+y^2=r_w^2\}$
ρ_w	كثافة الماء
H	سمك منطقة الزيت
ξ	المخروط - البيسطح زيت - ماء -
$w(x,y,z)$	$\int_z^H k(t)\left[\widetilde{\Phi_0}(x,y,t)-\alpha t-\beta\right]dt$
χ_Ω	الدالة المميزة للجزء المفتوح Ω
رموز	البــــــــاب الثــــــــاني
$\partial\Omega$	حافة Ω

$\overline{\Omega}$	ملاصقة Ω
$\mathring{\Omega}$	داخلية Ω
$C^\infty(\Omega)$	فضاء التوابع المعرفة على Ω القابلة للاشتقاق مالا نهاية من المرات في Ω
$\mathcal{D}(\Omega)$	فضاء التوابع المتراصة الحوامل في Ω والمنتمية إلى الفضاء $C^\infty(\Omega)$
$\mathcal{D}_K(\Omega)$	$\{u \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \operatorname{supp} u \subset K\}$
supp u	حامل التابع u
$C^m(\overline{\Omega})$ $m \in \mathbb{N}$	فضاء الاقتصارات على $\overline{\Omega}$ لكل التوابع المعرفة على $\mathbb{R}^n$ والقابلة للمفاضلة بالاستمرار m مرة
$L^p(\Omega)$	فضاء التوابع الحقيقية المعرفة شبه كليا على Ω القابلة للقياس وذات القوة p جموعة
$H^m(\mathbb{R}^n)$	$(m \in \mathbb{N}), \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n), \lvert\alpha\rvert \leq m\}$
$W^{l,p}(\Omega)$	$(l \in \mathbb{N}), \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega) \mid \forall \lvert\alpha\rvert \leq l\}$
$W^{l,p}(\Omega)$	$(l \in \mathbb{R}_+), \left\{u \in W^{[l],p}(\Omega) \mid \int_\Omega \int_\Omega \sum_{\lvert\alpha\rvert=[l]} \frac{\lvert D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\rvert^p}{\lvert x-y\rvert^{n+p(l-[l])}} dxdy < +\infty \right\}.$
Γ_d	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$
$\widetilde{\Gamma}_d$	$\Gamma_d \cup$ (نظيرΓ_dبالنسبة لـ$z = H$)
$\widetilde{V}$	$\{u \in H^1(\widetilde{G}) \mid u_{\lvert\widetilde{\Gamma}_d} = 0\}$
G_1	نظير G بالنسبة للفضاء $z = H$
$\widetilde{G}$	$G \cup G_1 \cup \Gamma$
Γ_1'	نظير Γ_1 بالنسبة للفضاء $z = H$
U_{ad}	$\Big\{\xi : \overline{D} \longmapsto [\overline{h}, H], \lvert\xi(x,y) - \xi(x',y')\rvert \leq \lVert(x,y) - (x',y')\rVert M, \quad \xi(x,y) = H; \forall (x,y) \in \partial D, \xi(tx,ty) \geq \xi(x,y), \ \forall t > 1; (tx,ty) \in \overline{D}\Big\}$
رموز	**البـــــــــاب الثـــــــــالث**
G_r	هو المفتوح المحصل عليه نتيجة تقاطع نصف الفضاء المحدود بـ Oz والمفتوح G
Ω_r	$\{(r,z) \mid (r,z) \in G_r, 0 < z < \xi_r(r)\}$
Γ_{dr}	$\Gamma_{1r} \cup \Gamma_{2r} \cup \Gamma_{3r} \cup \Gamma_{4r}$

$\{u \mid u : G_r \longmapsto \mathbb{R},$ **قيوس** $\mid \int_{G_r} \lvert r^{1/2}u\rvert^2 drdz < +\infty\}$	$L^2_{1/2}(G_r)$
مجموعة التوابع من $\mathcal{D}(G_r)$ **المعدومة بجوار** Γ_{dr}	$\mathcal{D}_d(\overline{G}_r)$
$\{u \in H^1_i(G) \mid u_{\mid\Gamma_d} = 0\}$	V_i
$\{\xi_r : [0, r_e] \longmapsto [\overline{h}, H] \lvert \xi_r(r) - \xi_r(r')\rvert \leq M\lvert r - r'\rvert, \xi_r(r_e) = H\}$	U_{adr}
البـــــــاب الرابـــــــــع	**رموز**
تثليثا لـ G **بعدد منته من المستطيلات**	$\mathcal{T}(\ell)$
فضاء كثيرات الحدود من الدرجة ≤ 1 **في متغيرين**	Q_1
فضاء التوابع المستمرة على G **والمتطابقة في كل مستطيل** $R \in \mathcal{T}_\ell$ **مع كثير حدود من** Q_1	W_1
$\{\xi \in U_{ad} \mid \xi_{\mid e_i} \in P_1, \forall i = 1, ..., I(l)\}$	U_{adrl}
$\{v \in W_1 \mid v(a_i) = g_0(a_i)\}$	C_{01}
$\{v \in W_1 \mid v(a_i) = g_{00}(a_i)\}$	C_{001}
فضاء كثيرات الحدود ذات متغير واحد ومن الدرجة ≤ 1	P_1
الفضاء الجزئي من W_1 **المشكل من عناصر ذات أثر معدوم على** Γ_d	V_1
$\{\xi \in \mathrm{Lips}(0, r_e) \mid \xi/e_i \in P_1; 1 \leq i \leq I(l)\}$	U_l

1.0. مقدمة

نهتم في دراستنا هذه بظاهرة مخروط الماء في مكمن للمحروقات ذي طورين ماء وزيت (بترول).

قبل بدء عملية الاستغلال، يكون البيسطح [1] زيت ـ ماء أفقيا . عند بدء الاستغلال، تتولد في المكمن تدرجات في الضغط تتفوق على قوى الجاذبية وتمتص طبقة الماء السفلية نحو البئر. إذن البيسطح زيت ـ ماء يأخذ شكلا مخروطيا محوره محور البئر.

ينبغي علينا تعيين شروط الاستغلال الأمثل التي تضمن عدم وصول رأس المخروط إلى قاع البئر: إنها مسألة " للحافة الحرة ". إن المجاهيل الثلاثة لهذه المسألة هي البيسطح زيت ـ ماء، توزيع الكمون في منطقة الزيت والتدفق. درست هذه المسألة للمرة الأولى من قبل موسكات M. Muskat وويكوف D. Wyckoff . (أنظر [12]) اللذان اقترحا، سنة 1934 حلا، يعتمد الفرضيات التالية (التي تدعى تقريب موسكات Muskat) :

- ارتفاع المخروط صغير نسبيا (مقارنة مع المسافة التي تفصل قاع البئر عن البيسطح الابتدائي).
- الطبقة المائية مستقرة.
- وجود مخروط الماء لا يحدث اضطرابا في توزيع كمون الزيت (أنظر [12] و [8]) .

بتبني الفرضيات السابقة اهتم العديد من الباحثين بتعيين منسوب إنتاج حرج، بمعنى : تعيين منسوب إذا تجاوزناه يصل الماء إلى البئر فيغمره. كانت دراستهم تعتمد على طريقة التحاكي الكهربائي، أو باعتماد تجارب على نماذج مصغرة. ومن بين هؤلاء الباحثين نذكر : بورنازيل Bournazel (أنظر [3])، وشاني Chaney (أنظر [5])، وشيرسي Cherrici (أنظر [7])، وسوبوسينيسكي Sobociniski (أنظر [17])، سنة 1954 , درس ماير Meyer وغاردر Garder (أنظر [11]) المسألة بفرض الماء ساكنا، وتمكنا من حساب منسوب حرج جاف وهذا دون تعيين صريح للكمون في منطقة الزيت .

في حالة بئر يخترق كليا طبقة الزيت لكنه ملبس بالإسمنت تحت عمق معين، أعطى زياني A. Ziani (أنظر [20])، سنة 1976 حلا للمسألة ـ بدون فرضيات موسكات Muskat وماير Meyer ـ وهذا بتحويل المسألة إلى متباينة تغايرية .

[1] نصطلح على تسمية السطح الفاصل بين الزيت والماء بالبيسطح .

أما في هذا العمل نقترح تطبيق تقنيات على الحيزات لدراسة مسألة مخروط الماء، وهذا دون اعتماد فرضيات موسكات Muskat وماير Meyer وفي حالة بئر ذي نفاذية جزئية مع قاع غير نافذ.