Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure
-Vieux Kouba- (Alger)
Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
- القبة القديمة - (الجزائر)
قسم الرياضيات

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

دراسة نوعية لبعض الجمل التفاضلية لكولموغروف

من إعداد:
* ملكي صفاء
* ملكي مروة

تحت إشراف الأستاذ:
* بوودن كريم

تناقش يوم 2015/06/13 من طرف لجنة المناقشة:

* سليماني كمال .... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة .... رئيسا
* بوودن كريم .... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة .... مشرفا
* عزوق سليمان .... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة .... مناقشا

السنة الجامعية: 2015/2014
دفعة جوان: 2015

0.1 مقدمـــــــــــة

تعد الجمل التفاضلية فرعا مهما في الرياضيات التطبيقية فهي تستعمل في الغالب ميادين الحساب العلمي على سبيل المثال لدينا جمل تفاضلية ننمذجها إلى أنظمة ديناميكية.

الحل الصريح أو حتى التقريبي لجملة تفاضلية هو عموما صعب أو مستحيل، إن الطرق العددية تسمح فقط بحساب حل وفق شروط إبتدائية معطاة ـ على مجال منته من الزمن ـ .

تستهدف النظرية إذن الدراسة النوعية و تبحث بشكل خاص لفهم التطور لمدى طويل .

سوف نهتم في هذا العمل بالدراسة النوعية لبعض جمل المعادلات التفاضلية المألوفة المنمذجة بمسائل بيو إيكولوجية من نوع كولموغروف($kolmogorov$):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xF(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = yG(x,y) \end{cases}$$

حيث G,F توابع مستمرة و قابلة للاشتقاق على مفتوح من $\mathbb{R}^2$.

هذه المذكرة تنقسم إلى 3 فصول، سنبدأ من موجز تاريخي ثم نعرض نموذج (الفريسة و المفترس) للوتكافولترا ($Lotka - Volterra$).

الفصل الأوّل هو عبارة عن معجم يجمع بعض المعارف الأساسية و الضرورية لادراك المذكرة ككل.

الفصل الثّاني و هو مكرّس لعرض ثلاث طرق مختلفة للحل، عن طريق الحل الصّريح ، العددي، ثم الدّراسة النوعية، حيث نعتبر جملة تفاضلية مستويا عاما . سنحدد شروط هذه الجملة ذات الدور المنته.

و أخيرا، في الفصل الثّالث، نبحث عن دور منته لنظام كولموغرف.

0.2 : مدخل تاريخي

أعلن جالوا ($Galois(1832-1811)$) أنّ أغلب المعادلات التفاضلية، خاصة المعادلات غير الخطية، ليس لها حلول مقدرة أو حتى تكتب بأشكال معينة.
كما برهن ليوفيل ($Liouville$) في عام 1841 على استحالة حل بعض المعادلات التفاضلية.
درس بوانكاري ($Poincare$) في سنة 1890 المشكلة من وجهة نظر نوعية، بحيث تقوم منهجية الدراسة على دراسة تسلسل نقاط تقاطع المسار مع مستو عمودي عليه.
قدم الرياضي هلبرت ($Hilbert$)خلال المؤتمر الدولي الثاني للرياضيات سنة (1900) ، 23 مشكلة، يطرح الجزء الثاني من المشكل السادس عشر لهلبرت مسألة وجود عدد أعظمي للأدوار المتهية للجملة التالية:

$$\begin{cases} x' = F(x,y) \\ \\ y' = G(x,y) \end{cases} \qquad (0.2.1)$$

نشير بـ H_n لهذا العدد الاعظمي، حيث $F(x,y)$ و $G(x,y)$ عبارة عن كثيرات حدود من درجة معطاة، (هذا السؤال ايضا مفتوح).

اقترح ديلاك($Dulac(1923)$)برهانا أكد فيه أن H_n متهية من أجل كل n بحيث $n = max(degF, degG)$ ،لكن برهانه تضمن خطأ. إنّ حل ديلاك لهذا المشكل درس على نحو مستقل من قبل إلياشنكو ($Ilyashenko(1991)$) و إكال ($Ecalle$)، مارتيني ($Martinet$) و موسو ($Moussu(1987)$) ثم إكال.

هذا الحل يسمح باظهار أنّ $H_n < \infty$. وجد بتروفسكي ($Petrovsky$)و لانديس ($Landis(1957)$) قيمة H_2 لكنهم لمّحوا إلى وجود خطأ في مبرهنتهم (لانديس و بتروفسكي 1967) قبل أن تلغى بمثال مضاد لشي ($Shi(1982)$) من خلال نظام رباعي ذو أربع أدوار متهية، كما أنه إذا كان H_n عدد منته من أجل كل n ، فأنّ الشيء الوحيد الذي نعلمه هو أن $H_2 \geq 4$ و $H_3 \geq 11$ (جبيني ($Jibin$) و شونفو ($Chunfu$)، 1985)، زولادك ($Zoladek$ 1995))، أعطى كريستفر ($Christopher$) و إيلويد ($Iloyd(1995)$)حد أدنى للعدد H_n : $H_n \geq n^2 log(n)$
و قد عمل العديد من الرياضياتيين على هذا الموضوع.

في علم الأحياء الرياضي، اعطى لوتكا - فولترا نموذجا لجملة معادلات تفاضلية تعرف باسم (الفريسة - المفترس) هذا النموذج يصف حركة عناصر فضائين و الذي من بين عناصر الفضاء الثاني ذاته يتغذوا على عناصر الفضاء الأوّل.

0.3 : عرض نموذج (الفريسة ـ المفترس) للوتكا ـ فولترا

و قد أقترح هذا النموذج بشكل مستقل من قبل ($A.J.Lotka$) في 1925 و ($v.volterra$) في 1926 ، و من هنا جاءت تسميته بنموذج لوتكا ـ فولترا ($Lotka - Volterra$). لقد لعب هذا النموذج دور مهم في دراسة ديناميكيّة المجتمعات و عرض لوصف التفاعل بين نوعين من الفضاءات:
المفترسين (ثعالب ـ قروش) و الفرائس (أرانب ـ سردين). قبل وصف هذا النظام، نعطي ترجمة لوسائط هذا النظام (لوتكا ـ فولترا).
ليكن $x(t)$ و $y(t)$ عدد الفرائس و المفترسين في زمن t .
نستطيع تعريف تابعين:

$$x : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto x(t) \qquad ; \qquad y : [o, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto y(t) \tag{0.3.1}$$

نفرض أنّهما من الصنف C^1 من أجل كل t موجب تماما.
هذا النموذج يرتكز على الفرضيات التالية:

في غياب المفترسين، الفرائس تعرف تزايدا أسيا، يعني:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) \quad \text{حيث} \quad a \geq 0 \quad \text{و} \quad x(t) \geq 0 \quad \text{هو معدّل الولادات} \tag{0.3.2}$$

في غياب الفرائس يعرف المفترسون تناقصا أسيا، بسبب نقص الغذاء، و منه يصبح:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -cy(t) \quad \text{حيث} \quad c \geq 0 \quad \text{و} \quad y(t) \geq 0 \quad \text{هو معدّل الوفيات} \tag{0.3.3}$$

اذا كان النوعان موجودان، نفرض أنّ:
معدّل صيد الفرائس يتناسب مع عدد التصادمات بين الفرائس و المفترسين، يمثل بـ:
$-bx(t)y(t)$ حيث $b \geq 0$ هو معدّل وفيات الفرائس مردّه إلى التصادمات مع المفترسين
معدّل تغير عدد المفترسين يتناسب مع عدد التصادمات بين الفرائس و المفترسين، مثل بـ :
$dx(t)y(t)$ حيث $d \geq 0$ هو معدّل ولادات المفترسين بدلالة التصادمات و استهلاك الفرائس
هذه الاعتبارات تقودنا إلى المعادلات التفاضلية التالية:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \alpha - by \quad \text{و} \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = -c + dx \tag{0.3.4}$$

من وجهة نظر رياضية هذه الافتراضات تقودنا إلى جملة غير خطية للمعادلتين التفاضليتين التاليتين:

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases} \quad ,(x(0), y(0)) = (x_0, y_0), x_0, y_0 \geq 0 \quad \text{مع} \qquad (0.3.5)$$

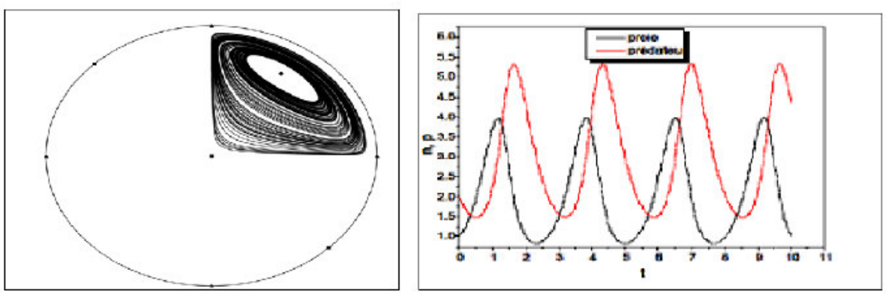
صورة الطور لنموذج لوتكا ـ فولترا

سنرسم نموذج لوتكا ـ فولترا بأخذ العوامل التّالية:

$$a = 3 \qquad ; b = 1 \qquad ; c = 2 \qquad ; d = 1$$

إذن لدينا:

$$\begin{cases} x' = x(3 - y) \\ y' = y(-2 + x) \end{cases} \qquad (0.3.6)$$



الشكل $(1-0)$ صورة لطور و مقارنة بين تغير الفريسة و المفترس.

لا يوجد دور منته في جمل لوتكا ـ فولترا:

$$\begin{cases} x' = x(a_1x + b_1y + c_1) \\ \\ y' = y(a_2x + b_2y + c_2) \end{cases} \qquad (0.3.7)$$

كما أن $F(x,y) = a_1x + b_1y + c_1$ و $G(x,y) = a_2x + b_2y + c_2$

نموذج لوتكا ـ فولترا له قاعدة أدبية واسعة، فقد كان نقطة إنطلاق للعديد من النماذج المطروحة حاليا، من بين هذه النماذج نموذج كولموغروف.

إعتبر كولموغروف نظام الفريسة و المفترس عاما:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xF(x,y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = yG(x,y) \end{cases} \qquad (0.3.8)$$

مع F و G توابع مستمرة قابلة للاشتقاق على مفتوح من $\mathbb{R}^2$.

عملنا مكرس لدراسة بعض اشكال هذا النظام.