

Ministere de l'Enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique  
Ecole Normale Supérieure  
-Vieux Kouba - (Alger)  
Departement de Mathmathiques

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
- المدرسة العليا للأساتذة -



-القبة القديمة ( الجزائر )  
قسم الرياضيات

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

الحساب الفعلي لقيم التابع زيتا لريمان

تحت إشراف الأستاذة:  
★ غياطو سهام

من إعداد:

♦ بوفروعة مونية  
♦ جوايبيبة زينب

تناقش يوم 2015/06/13 من طرف لجنة المناقشة:  
خضراوي عثمان ..... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة .... رئيسا  
غياطو سهام .... أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة .... مشرفا  
بوقرة محمد .... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة .... مناقشا

السنة الجامعية: 2015/2014

دفعة جوان: 2015



# المحتويات

01 ..... مقدمة

## الفصل الأول مفاهيم عامة

02 ..... الرموز المستعملة

03 ..... التتابع الحسابية

04 ..... تابع  $\mu(n)$  Mobius

06 ..... تابع  $\Lambda(n)$  Von – Mongolt

07 ..... سلاسل ديريكلي

09 ..... دراسة تقاربات بعض السلاسل

## الفصل الثاني

### أعداد وكثيرات حدود برنولي

15 ..... توطئة و تعريف

17 ..... بعض خواص أعداد وكثيرات حدود برنولي

23 ..... بعض قيم أعداد برنولي غير المعدومة

24 ..... توابع برنولي

24 ..... تعريف

24 ..... بعض خواص توابع برنولي

## الفصل الثالث

### الحساب الفعلي لقيم التابع زيتا لريمان

28 ..... الدالة زيتا لريمان

28 ..... تعريف الدالة زيتا

28 ..... تعريف مشتق الدالة زيتا لريمان

---

28	جاء أولر .....
34	تعيين بعض قيم الدالة زيتا $\zeta$ .....
36	التمديد التحليلي لدالة زيتا لريمان $\zeta$ .....
45	أصفار الدالة زيتا لريمان $\zeta$ .....
45	فرضية ريمان .....
47	الخاتمة .....
48	الملخص .....

## الرموز المستعملة

(1)  $N = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$  تمثل مجموعة الأعداد الطبيعية

(2) الحرف  $p$  يمثل دوما عددا أوليا

(3) الرمز  $\sum_{p \leq n}$  و  $\prod_{p \leq n}$  يمثلان على الترتيب جداء و مجموع الأعداد الأولية  $p \in \{2, n\}$

(4) من أجل كل عددين موجبين طبيعيين  $m$  و  $n$  نستعمل الرموز التالية :

أ)  $m$  معناه  $m$  يقسم  $n$

ب)  $mn$  معناه  $m$  لا يقسم  $n$  مع  $(n, m)$  يمثلان القاسم المشترك

ج)  $n \parallel p^\alpha$  يمثل ان  $p^\alpha$  يقسم تماما  $n$  حيث  $p^\alpha$  يقسم  $n$  و  $p^{\alpha+1}$  لا يقسم  $n$

(5)  $[x]$  يمثل الجزء الصحيح لـ  $x$  حيث  $[x] - 1 \leq x \leq [x]$

6  $n$  عدد طبيعي مع  $n \geq 2$  إذن يمكن كتابة  $n$  على شكل جداء عوامل أولية

$$n = \prod_{p^\alpha \parallel n} p^\alpha = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

(7)  $f$  و  $g$  تابعين معرفين على  $[x_0, +\infty[$  بحيث  $g(x) > 0$  من أجل كل  $x > x_0$  لدينا

$$f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \exists M > 0 : |f(x)|g(x) \leq M^*$$

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = 1^*$$

## مقدمة

تعد أعداد برنولي من بين المواضيع التي تخص بدراسة نظرية الأعداد و هي عبارة عن مجموعة أعداد اكتشفها العالم السويسري جاكوب برنولي (1654 - 1705). تظهر أعداد برنولي في حساب التابع زيتا لريمان عند بعض القيم , هذه الأهمية التي تلعبها أعداد برنولي هي بالضبط محل دراستنا .  
تتضح أعداد برنولي في عبارة الدالة زيتا عند تمديدها تحليليا باستعمال إحدى طرق التمديد التحليلي و التي تعتمد على قانون ماك لوران أو مجاميع ابل .  
حولنا أن نقدم في مذكرتنا هذه صورة واضحة عن الدور الذي تلعبه أعداد برنولي في حساب التابع زيتا لريمان