Ministère de l'enseignement Supérieur
et de laRecherche Scientifique
Ecole Normale Supérieure
Vieux Kouba(Alger)

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
القبة القديمة (الجزائر)

قسم الرياضيات

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم المتوسط

أعداد وكثيرات حدود برنولي وأولر

إعداد:
✓ عباس كنزة

تحت إشراف الأستاذ:
خالدي العلاء

السنة الجامعية 2014-2015.
(دفعة جوان: 2015)

الفهرس

الفصل الأول

متتالية كثيرات حدود *Appell*

الفصل الثاني

كثيرات حدود برنولي و أولر

الفصل الثالث

أعداد برنولي و أولر

الفصل الرابع

التطبيقات

المـــلاحــق

مقدّمة

الموضوع الذي نتطرق اليه من خلال مذكرتنا حول أعداد وكثيرات حدود برنولي وأولر وهو في صميم المواضيع الجبرية إذ يعتبر من أهّم الطرق التي تعتمد عليها في دراسة وايجاد حلول الكثير من المسائل الرياضية (علم الحساب ، نظرية الأعداد والتحليل التابعي) .

فاخترنا أن يتم تقسيم المذكرة إلى أربعة فصول:

حيث تضمن الفصل الأول تمهيد للموضوع، أين قدّمنا فيه مفاهيم خاصة بمتتاليات كثيرات حدود *Appell* ، من تعاريف وخواص ، وبناءا على هذه المعارف حاولنا التقديم الرياضي لكثيرات حدود برنولي وأولر .

فجاء الفصل الثاني ليتناول محتواه كثيرات حدود برنولي وأولر من حيث أهم التعاريف والخواص التي تتمتع بها هذه الأخيرة ، وأعطينا دستور راب ، وفي الأخير ميزنا بعض العلاقات بين كثيرات حدود برنولي وأولر.

أما الفصل الثالث قدمنا من خلاله أعداد برنولي فيما يخص تعريفها وبعض خواصها كما أضفنا العلاقة بين أعداد برنولي و كثيرات حدود برنولي .وبنفس الطريقة عالجنا اعداد أولر.

و في الأخير من خلال الفصل الرابع حاولنا إبراز بعض تطبيقات الموضوع خاصة أعداد برنولي في الحساب كي ندرك فعلا مدى أهمية هذه المفاهيم في الرياضيات ككل.

مختلف الترميزات الواردة في المذكرة

- $\mathbb{N}$: مجموعة الأعداد الطبيعية.
- $\mathbb{N}^*$: مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة.
- $\mathbb{Z}$: مجموعة الأعداد النسبية الصحيحة.
- $\mathbb{Q}$: مجموعة الأعداد الناطقة.
- $\mathbb{R}$: مجموعة الأعداد الحقيقية.
- $\mathbb{C}$: مجموعة الأعداد المركبة.
- $A[X]$: حلقة كثيرات حدود بمعاملات في الحلقة A
- $K[X,Y]$: حلقة كثيرات حدود ذات متغيرين على K .
- $degP(x)$: درجة كثير حدود $P(x)$.
- $n!$: n عاملي $n! = n(n-1)(n-2)...3 \times 2 \times 1$.
- $\binom{n}{k}$: توفيقة k في n بحيث: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- $B_n(x)$: $n-$ كثير حدود برنولي.
- $E_n(x)$: $n-$ كثير حدود أولر.
- B_n : أعداد برنولي بحيث: $B_n = B_n(0)$.
- E_n : أعداد أولر بحيث: $E_n = 2^n E_n(\frac{1}{2})$.
- $S_m(n)$: مجاميع القوى الطبيعية بحيث: $S_m(n) = 0^m + 1^m + 2^m + ... + n^m$.
- $T_m(n)$: المجاميع المتناوبة لقوى طبيعية بحيث: $T_m(n) = 0^m - 1^m + 2^m + ...(-1)^n n^m$.
- z : عدد مركب.
- $|z|$: طويلة عدد مركب.
- ζ : التابع زيتا لريمان .

لمحة تاريخية

" إنّ أعداد برنولي من بين الأشياء الساحرة في الرّياضيات فنجدها في الحساب ، نظرية الأعداد و حتى في التحليل و الطبولوجيا " **اندريه جوال** $(Andre-Joyal)$

تعود جذور أعداد برنولي إلى تاريخ الحساب المبكّر لمجاميع القوى الصحيحة و التي أصبحت محّل إهتمام الرّياضيين منذ القدم و هذا ما قادهم إلى تحديد صيغة و خصائص المجاميع التالية :

$$S_m(n) = 1^m + 2^m + ... + n^m$$

يؤكدّ الرّياضي **دانوا نيلسون** $(Danois-Neilsen)$ في كتابه المعنون بـ " **معالجة أوّلية لأعداد برنولي** " ، كما أضاف الرياضي الفرنسي **إدوارد لوكاس** $(Edouard-Lucas)$ في كتابه المعنون بـ " **نظرية الأعداد** " أنّ الصيغ التي يلي ذكرها عرّفت في زمن أرخميدس.

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \frac{n\left(n+1\right)}{2}; \\ S_2(n) &= \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}; \\ S_3(n) &= \frac{n^2\left(n+1\right)^2}{4} = \Big(S_1(n)\Big)^2. \end{aligned}$$

كما أنّ طبيب العرب **الكاشي** $(Alkachi)$ أعطى في مخطوطته الكتابية المسجلة عام 1589 الصيغة التالية:

$$S_4(n) = \left[\frac{S_1(n)-1}{5} + S_1(n)\right] S_2(n).$$

و في نفس الحقبة الزمنية أعطى الرّياضي **جوهان فولهابير** $(Johann-Faulhabar)$ المجاميع $S_m(n)$ من أجل $1 \le m \le 17$ ، لكن دون شرح الطريقة التي توصّل إليها .

كما لاحظ أنّ المجاميع $S_{2m+1}(n)$ من أجل القيم الإبتدائية لـ n غير المعدومة، نستطيع التعبير عنها بالاستناد بكثير الحد η بحيث:

$$\eta = \frac{n\big(n+1\big)}{2} = S_1(n).$$

و قد وجد **جوهان فولهابير** $(Faulhaber)$ الصيغ التي قام العالم **دونالد كنوث** $(Donald-Knuth)$ بدراستها وهي

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \eta^2.\\
\sum_{k=1}^{n} k^5 &= \frac{1}{3}(4\eta^3-\eta^2).\\
\sum_{k=1}^{n} k^7 &= \frac{1}{6}(12\eta^4-8\eta^3+2\eta^2).\\
\sum_{k=1}^{n} k^9 &= \frac{1}{5}(16\eta^5-20\eta^4+12\eta^3-3\eta^2).\\
\sum_{k=1}^{n} k^{11} &= \frac{1}{6}(32\eta^6-64\eta^5+68\eta^4-40\eta^3+5\eta^2).\\
\sum_{k=1}^{n} k^{13} &= \frac{1}{105}(960\eta^7-2800\eta^6+4592\eta^5-4720\eta^4+2764\eta^3-691\eta^2).\\
\sum_{k=1}^{n} k^{15} &= \frac{1}{12}(192\eta^8-768\eta^7+1792\eta^6-2816\eta^5+2872\eta^4-1680\eta^3+420\eta^2).\\
\sum_{k=1}^{n} k^{17} &= \frac{1}{45}(1280\eta^9-6720\eta^8+21120\eta^7-46880\eta^6+72912\eta^5-74220\eta^4+43404\eta^3-10851\eta^2).
\end{aligned}
$$

وفي الأخير قدم العالم السويسري **جاك برنولي** $(Jaques-Bernoulli)$ صيغة عامة لهذه المجاميع إنطلاقا من متتالية ناطقة:

$$
\begin{cases}
B_0 &= 1\\
B_n &= -\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k} B_k \qquad ,\forall n\geq 1
\end{cases}
$$

و لاحقا أعطى **دانيال برنولي** $(Daniel-Bernoulli)$ متتالية كثيرات حدود برنولي $\Big(B_n(x)\Big)_{n\geq 0}$ المعرّفة ب:

$$
B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_{n-k}x^k.
$$

و اهتم كلا من **ليونارد أولر** $(Leonard-Euler)$ ، **دانيال برنولي** $(Daniel-Bernoulli)$ بتحديد مجاميع القوى المتناوبة $T_m(n)$ بحيث:

$$
T_m(n)=-1^m+2^m-3^m+...+(-1)^n n^m.
$$

و ظهرت متتالية أخرى عرفت بمتتالية الأعداد الصحيحة لأولر معطاة بـ:

$$\begin{cases} E_0 &= 1 \\ E_n &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{n-1-k} E_k \quad , \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

التي سمحت لـ $(Euler)$ بإثبات العلاقة التالية:

$$T_m(n) = \frac{1}{2}\Big(\big(-1\big)^n E_m(n+1) + E_m(0) \Big).$$