الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة
القبة القديمة (الجزائر)
قسم الرياضيات

*M*inistère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche
Scientifique
ECOLE NORMAL SUPERIEURE
VIEUX KOUBA (ALGER)
Département de Mathématiques

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم المتوسط

التكاملات المضاعفة

إعداد
ماجي مليكة
دحمان صبايحية أمينة

تحت إشراف الأستاذة
فريطس وداد

لجنة المناقشة

الأستاذة : شوية فاطمة ..... رئيسة.
الأستاذة : فريطس وداد..... مشرفة.
الأستاذة : بوسنة أمينة..... ممتحنة.

السنة الجامعية: 2015/2014

دفعة جوان 2015

الفهـرس

ـ الفهرس 1
ـ قائمة الرّموز المستعـملة 3
ـ **مقدّمـة** 4

الفصل الأوّل مفـاهيـم أوّليـة

ـ 1.1 تعـاريف 5
ـ 2.1 نظـام الإحداثيات 7

الفصل الثاني : التكـاملات الثنائية

ـ 1.2 التكـامل الثنائـي على مستطيل 13
ـ 1.1.2 تكـامل دالّـة درجية 13
ـ 2.1.2 تكـامل دالّـة مستـمرّة 15
ـ 3.1.2 خواص تكـامل دالّـة مستـمرّة 17
ـ 4.1.2 حساب التكـامل الثنائـي لـدالّـة مستـمرّة 18
ـ 2.2 التكـامل الثنائـي على منطقة مـحدودة من $\mathbb{R}^2$ 22
ـ 1.2.2 الدالّة القابلة للـمكـاملة علي منطقة مـحدودة من $\mathbb{R}^2$ 22
ـ 2.2.2 حساب التكـامل الثنائـي 23
ـ 3.2.2 تـحويل الـمتغـيّر 30

.. **الفصل الثالث : التكـامل الثلاثـي**

ـ 1.3 التكامل الثلاثي على بلاطة 34
ـ 1.1.3 تكـامل دالّة درجية 34
ـ 2.1.3 تكـامل دلّة مستـمرّة 34
ـ 2.3 حساب التكـامل الثلاثي 35
ـ 1.2.3 حساب التكـامل الثلاثي لدالّة على منطقة مـحدودة من $\mathbb{R}^3$ 36
ـ 3.3 تـحويل المتغيّر 37
ـ 1.3.3 تـحويل المتغيّر التآلفي 37
ـ 2.3.3 تـحويل الـمتغـيّر في الإحداثيّات الأسطوّانيّة 37
ـ 3.3.3 تـحويل الـمتغـيّر في الإحداثيّات الكرويّة 38

الفصل الرّابع : تطبيقـات

ـ 1.4 تطبيقـات حول التكامل الثنائي 41
ـ 2.4 تطبيقـات حول التكامل الثلاثي 46
ـ الخاتمة 49
ـ المصطلـحات 50
ـ قائمة المراجع 52

قائمة الرّموز المستعملة

$\mathbb{R}$: مجموعة الأعداد الحقيقيّة.

$\varepsilon(R)$: مجموعة الدّوال الدّرجية على المستطيل R

$\varepsilon^{+}(f)$: مجموعة الدّوال الدّرجية الأكبر من f

$\varepsilon^{-}(f)$: مجموعة الدّوال الدّرجية الأصغر من f

$\|\ .\ \|$: النّظيم

det : المحدّد

$\mathcal{C}$: مجموعة التوابع مستمرّة

$\chi_{\mathcal{A}}$: الدالّة المميّزة لـ $\mathcal{A}$

$|J|$: محدّد المصفوفة اليعقوبية

sup : الحدّ الأعلى

inf : الحدّ الأدنى

$\circ$: التّركيب

مقـــدمة

تعتبر التكاملات من أهم الـمواضيع و أكثرها شيوعا و إستعمالا خاصة في الرياضيات و الفيزياء و قد قمنا في هذه المذكرة بتسليط بعض من الضوء على هذا الـموضوع بدراسة التكاملات الـمضاعفة الثنائية و الثلاثية . تـحتوي الـمذكرة على أربعة فصول:

الفصل الأول قمنا فيه بتعريف أبرز الـمفاهيم الـمستعملة في باقي الفصول .

الفصل الثاني :يتـمـحور حول التكاملات الثنائية(التكامل الثنائي على مستطيل و التكامل الثنائي على منطقة مـحدودة من $\mathbb{R}^2$) ، أهـم خواصـها و طرق حسابـها .

الفصل الثالث : تناولنا فيه التكاملات الثلاثية و طرق حسابـها و هو مستنتـج من الفصل الثاني .

أما الفصل الرابع و الأخير فهو عبارة عن تطبيقات حول التكاملات الثنائية و الثلاثية (حساب الـحجوم ، حساب عزم العطالة و حساب مركز ثقل جسم ما...).