وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
– القبة القديمة – (الجزائر)
قسم الرياضيات

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure
-Vieux Kouba- (Alger)
Département de Mathématiques

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم المتوسط

دالة عدد القواسم الواحدية لعدد طبيعي

من إعداد:
⋆ فاهم هدى
⋆ مدني مريم

تحت إشراف الأستاذة:
⋆ بوسالمي بلحوث

تناقش يوم14جوان2015م الموافق ل25 شعبان 1437ه
أمام لجنة المناقشة:

1 بوودن كريم ..... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة ..... رئيسا
2 براهيمي طاهر ..... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة ..... ممتحنا
3 بوسالمي بلحوث ..... أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة ..... مشرفا

السنة الجامعية:2015/2014

دفعة جوان:2015

الفهرس

مقدمة 03
لمحة تاريخية 04

الفصل الأول
تعـــــاريف وعّمـوميات

1 **الدالة الحسابية** 07

2 **الدالة الحسابية الضربية و الضربية كليا** 07

1.2 الدالة الحسابية الضربية 07
2.2 الدالة الحسابية الضربية كليا 08
3.2 أمثلة لدوال ضربية وليست ضربية كليا 09
4.2 نظرية 12
5.2 نتائج 13

3 **الدالة الحسابية الجمعية ولجمعية كليا** 15

1.3 الدالة الحسابية الجمعية 15
2.3 الدالة الحسابية الجمعية كليا 16

4 **النهاية العليا و السفلى لمتتالية حقيقية** 17

1.4 النهاية العليا و السفلى لمتتالية حقيقية 17
2.4 بعض النظريات المتعلقة بالنهايات العليا و السفلى 20

5 **بعض الدوال الشهيرة لنظرية الأعداد** 22

1.5 الدالة $\pi(x)$ 22
2.5 الدالة $\theta(x)$ 23

الفصل الثاني
دالة عدد القواسم الواحدية لعدد طبيعي d^*

1 **دالة عدد القواسم الواحدية لعدد طبيعي** 25

2 **الدالة** d^* **دالة حسابية ضربية** 26

3 **نتائج** 28

4 **جداء اللف لديريكلي** 29

5 **النهاية السفلى للدالة** d^* 32

الفصل الثالث
المراتب الكبرى للدالة d^*

1 **تمهيد** 41

2 **توطئة** 41

3 **النهاية العليا لـ** f^* 44

4 **المراتب الكبرى للدالة** d^* 49

الخاتـــــمة 50

المراجع 51

مقدّمة

لقد جذب تخصص نظرية الأعداد اهتمام العديد من الباحثين الرياضياتيين وهذا منذ وقت طويل ، وهذا راجع إلى أن الدوال الحسابية تلعب دورا مهما في النظرية التحليلية للأعداد ،حيث تستعمل خواصها لإثبات نتائج مهمة. لقد حظي هذا الموضوع ببحوث عديدة قبل بحثنا هذا، وكل واحد منها يفسح المجال للذي يأتي بعده ليضيف إلى ما سبقه أو ليواصل التوسع فيه. فبعد دراسة الدالة (d) دالة عدد قواسم عدد طبيعي n ارتأينا أن نسلط الضوء على دالة عدد القواسم الواحدية لعدد طبيعي n (d^*) .

فقسمنا هذا البحث إلى 3 فصول :

أدرجنا في الفصل الأول أهم المفاهيم و التعاريف حول الدوال الحسابية و أهم خصائصها (ضربية ، جمعية ،ضربية كليا، ...) .

أما الفصل الثاني فقد خصصناه للتعريف بالدالة d^* و إعطائها بعض القيم الأولية كمادرسنا ضربيتا بطرق مختلفة و استخلاص بعض النتائج حولها.

أما في الفصل الثالث فقد قمنا بدراسة المراتب الكبرى للدالة d^* مستعينين في هذا بالدالة :

$$f^*(n) = \frac{ln(d^*(n))ln(n)}{ln(ln(n))}$$

.

لمحة تاريخية

1 . لمحة تاريخية

تعتبر $d^*(n)$ من بين الدوال الشهيرة في نظرية الأعداد ، و قد إهتم بدراستها العديد من الرياضيين الكبار و من بينهم نذكر :

1.1 سرينيفازا رامانوجان $SirinivasaRamanujan$ $(1887-1920)$:

- حياته :

ولد رامانوجان سنة 1887 م في عائلة فقيرة بجنوب الهند ، و قد بدأت تظهر مواهبه عندما بلغ سن السابعة، و في عام 1902 م تحصل على كتاب يضم حوالي 6000 نظرية و صيغة رياضية يحتوي على بعض البراهين القصيرة .
ساعده ذلك الكتاب على إيجاد طريقة حل معادلة من الدرجة الثالثة و حاول حل المعدلات من الدرجة الخامسة إذ لم يكن يعلم أن ذلك مستحيل بواسطة الجذور و حصل في السنة الموالية على منحة دراسية ، لكنه فقدها في السنة الموالية لأنه كان مشغولا بالرياضيات دون غيرها من المواد ، و رغم ذلك واصل أبحاثه الرياضية بطريقة عصامية دون علم بما يجري من دراسات و أبحاث في هذا الحقل عبر العالم ، و ظهرت في الواقع عبقرية رامانوجان في أعماله المتعلقة بالعدد اللغز π .

- دراسته:

كان رامانوجان قد طلب منحة دراسية غير أنه لم يفز بها رغم دعم الرياضي راماشندرا راوو ، أحد مؤسسي الجمعية الرياضية الهندية الذي إتصل به رامانوجان ناشدا مساندته.
يقول الأستاذ راوو حول هذه المقابلة : " دخل علي رامانوجان غير حالق و غير نظيف الهندام عيناه تبديان لمعانا ، كان يتأبط دفترا و الفقر باديا عليه ... فتح دفتره و أخد في شرح البعض من إكتشافاته . و قد أدركت بسرعة أن الأمر يتعلق برجل ليس كالأخرين ... غير أن معلوماتي لم تسمح لي بمعرفة ما إذا كان كلامه صوابا أو مجرد خرافات ... سألته عما يريد فقال : أريد منحة لأتمكن من العيش و مواصلة أبحاثي "

لسوء الحظ عجز الأستاذ راوو عن تلبية هذا الطلب و الواقع أن الرياضيين الهنود حثوا أثرياء البلاد على التكفل برامانوجان ماديا فإستجاب أحدهم عام 1910 م و قدم له منحة شهرية لكن رامانوجان لم يرضى بالعيش عن طريق الأحسان .

- وفاته :

بعد جهود كبيرة و مراسلات عديدة تحصل رامانوجان على منحة لمدة سنتين في ماي 1913 م فدخل جامعة كمبرج و تخرج منها دكتورا عام 1916 م ، و بعّد أقل من سنتين أنتخب عضوا في أبرز هيأة علمية و هي الجمعية الملكية اللندنية . وافته المنية بعد سنتين بسبب مرض أصابه .

1.2 بول إردوس $PaulErdos$ $(1913-1996)$:

- حياته :

ولد بول إردوس ببودابست عاصمة المجر في مارس 1913 م و توفي بوارسو عاصمة بولندا ، في سبتمبر عام 1996 م حين كان يحضر مؤتمرا دوليا في الرياضيات ، و كان الألمان قد ألقوا القبض على والده في الحرب العالمية الثانية ، فأخرجته أمه من المدرسة و واصلت تدريسه بالمنزل .
تحصل إردوس على شهادة الدكتوراه في الرياضيات عام 1934 م . إهتم منذ صغره بالأعداد ، إذ كان يقوم ذهنيا بعمليات ضرب الأعداد الثلاثية الأرقام و عمره لم يتجاوز الرابعة . و عندما بلغ 17 سنة إكتشف برهانا لنظرية أجمل من البرهان الذي كان انذلك . تقول هذه النظرية " أن بين كل عدد طبيعي (غير معدوم) و ضعفه يوجد على الأقل عدد أولي " مثال ذلك : بين 8 و 16 هناك عدد أولي خد مثلا 11 و 13 .

- من نظرياته :

من بين النتائج المهمة في نظرية الأعداد تلك المتعلقة بموقع الأعداد و توزيعها بين الأعداد الأخرى و هي مسألة لا زالت مطروحة إلى يومنا هذا ، لقد كان الموضوع من جملة إهتمامات إردوس و إهتدى عام 1949 م إلى برهان جد بسيط على نظرية بالغة الأهمية في الأعداد الأولية ، ذلك أن نوع المسائل الذي يهتم بها بول إردوس هي مسائل بسيطة عويصة الحل .
لقد قارب عدد البحوث و الكتب التي نشرها إردوس 1500 عنوانا . و إشترك معه في نشر هذه الأعمال حوالي 500 باحث ، إنه أرقام لم يدركها أحد من قبل .