وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
- المدرسة العليا للأساتذة -
-القبة القديمة- (الجزائر)
قسم الرياضيات

Ministere de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Ecole Normale Supérieure
-Vieux Kouba - (Alger)
Département de mathémathiques

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

نتائج و تطبيقات لنظرية بير

إعداد الطالب:
♦ طهراوي ياسين

تحت إشراف الأستاذة:
★ زغيب أسماء

لجنة المناقشة:

الأستاذ : وعزار لحسن .... رئيسًا

الأستاذ : موساوي توفيق .... ممتحنًا

الأستاذة : زيتوني ليلي .... ممتحنةً

الأستاذة : زغيب أسماء .... مشرفةً

السنة الجامعية: 2015/2014

دفعة جوان: 2015

المحتويات

الرموز المستعملة

$\mathbb{N}$	مجموعة الأعداد الطبيعة .
$\mathbb{Q}$	مجموعة الأعداد الناطقة .
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقية .
$\mathbb{C}$	مجموعة الأعداد المركبة .
$\emptyset$	المجموعة الخالية .
$[.]$	الجزء الصحيح .
$d(x,y)$	المسافة بين x و y .
$\|x\|$	نظيم العنصر x .
$\mathcal{B}(x,r)$	الكرة ذات المركز x و نصف القطر r .
$\overline{A}$	ملاصقة المجموعة A .
$int(A)$	داخلية المجموعة A .
Λ	تطبيق خطي.
$\sup\limits_{a\in A}\|\Lambda_a x\|$	الحد الأعلى لنظيم $\Lambda_a x$ لما a يتغير في A .
$x_n \longrightarrow x$	نهاية x_n لما $n \longrightarrow \infty$ هي x .
f'	المشتق الأول للتابع f .
$f^{(n)}$	المشتق من الرتبة n للتابع f .
$C([a,b])$	مجموعة التوابع المستمرة على $[a,b]$.
$C^{\infty}([a,b])$	التوابع القابلة للإشتقاق لانهائيا على المجال $[a,b]$.
$\bigcap\limits_{n\geq 1} A_n$	التقاطع القابل للعد للمجموعات A_n .
$\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$	الإتحاد القابل للعد للمجموعات A_n .
$s_n(f,x)$	المجموع الجزئي من الرتبة n لسلسلة فوريي للتابع f .
$C(T)$	الدوال المستمرة الدورية و دورها T على $\mathbb{R}$.
$\mathcal{V}(x_0)$	مجموعة جوارت x_0 .
A^c	متممة المجموعة A في المجموعة الكلية.
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	نهاية $f(x)$ لما $x \to a$ من اليمين .
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	نهاية $f(x)$ لما $x \to a$ من اليسار.
$\liminf\limits_{n} x_n$	النهاية السفلى للمتتالية x_n .
$\mathcal{L}(E,F)$	فضاء التطبيقات الخطية من E في F .

مقــدمة

سنقدم في مذكرتنا نظرية من بين أهم النظريات في التحليل الرياضي هي نظرية بير و التي تنص على أن التقاطع العدود لعائلة من المفتوحات الكثيفة في فضاء متري تام هو مجموعة كثيفة .

خلال إنجازنا لهذا البحث إعتمدنا في أغلب الأحيان على كتاب التحليل الحقيقي و المركب *–Real and complex Analysis–* لصاحبه والتر رودين *–Walter Rudin–* الذي يعتبر من أهم الكتب في التحليل الرياضي و إعتمدنا بصفة خاصة على الفصل الخامس المتعلق بأمثلة لتقنيات إستعمال الفضاءات البناخية الذي يحوي في جزء كبير منه على نظرية بير و نتائجها و بعض التطبيقات ، و ينتهي الفصل بمجموعة من التمارين القيمة التي حاولنا حل أكبر عدد منها و قمنا بصياغة بعضها على شكل تطبيقات .
أمّا فيما يخص نظرية بير التي تنسب إلى الرياضي الفرنسي ريني بير الذي قام بإثباتها سنة 1899 ، سنحاول عرض بعض نتائج و تطبيقات هذه النظرية في هذه المذكرة .

قسّمنا هذا العمل إلى ثلاثة فصول كالتالي :

الفصل الأول : تذكير بأهم المفاهيم و النتائج الأساسية في الطبولوجيا ، إضافة إلى بعض النظريات التي نستعملها في إثبات النتائج و التطبيقات فيما يخص موضوع مذكرتنا .

الفصل الثاني : قدمنا فيه نظرية بير و إثباتها و نتائجها كنظريتي التطبيق المفتوح و نظرية بناخ ـ شتاينهاوس و نظرية التشاكل إضافة إلى نتائج و قضايا طبولوجية .

الفصل الثالث : قدمنا فيه بعض التطبيقات فيما يخص نظرية بير خاصة فيما يخص التوابع ككثافة التوابع المستمرة غير القابلة للإشتقاق عند أي نقطة في مجموعة التوابع المستمرة على مجال مزودة بنظيم الحد الأعلى ، تطبيق لتقارب سلاسل فوريي للتوابع المستمرة و الدورية ، خاصية مميزة لكثيرات الحدود ، تطبيق في بعد الفضاءات البناخية ، و إثبات بسيط لكون $\mathbb{R}$ غير قابل للعد و تطبيق لمجموعة نقاط إستمرار نهاية متتالية توابع مستمرة .