وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
القبـــة - الجزائر
قسم الرياضيات

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم المتوسط

الدوال الكلاسيكية وتطبيقاتها

من إعــــداد :

- خلــيفي أسـماء
- عزيزو زيـنب

تحت إشراف الأستاذة :

- مصطفاوي زهية

شوية فاطمة	....	أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة	.... رئيسةً
مصطفاوي زهية	....	أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة	.... مشرفةً
غياطو سهام	....	أستاذة بالمدرسة العليا للأساتذة	.... مناقشةً

السنة الجامعية : 2015/2014

المحتوى

مـــدخـــل

1. نبذة تاريخية عن مفهوم التابع

يعتبر مفهوم التابع حقا من أهم المفاهيم في الرياضيات، مثلما كانت النقطة، المستوي والخط هي العناصر الأساسية للهندسة الإقليدية والتي هي النظرية المهيمنة من زمن اليونان حتى العصر الحديث .

يمكن العثور على أمثلة خاصة للتوابع في العصور القديمة. على سبيل المثال الحساب الذي يعني ضمنيا العلاقة بين مجموعة من الأشياء المعنية. و تسلسل الأرقام الحسابية، والعمليات الحسابية الأساسية الأربع، والجداول البابلية لمقلوب الأرقام والمربعات والجذور المربعة والمكعبات والجذور المكعبة.

يمكن اعتبار أن بعض علماء الرياضيات قد اقتربوا من المفهوم العصري للتوابع، من بين هؤلاء $Oresme(1323-1382)$ الذي طور نظرية هندسية لإحداثيات الأشكال، تمثل درجات مختلفة من الشدة والتمدد من خلال نظريته نجد مفاهيم عامة حول المتغيرات المستقلة والمتعلقة بالكميات لكن ظهور التوابع في بحوث الرياضيات كمفهوم واضح و كجزء من الدراسة يعتبر حديثا ويعود إلى نهاية القرن السابع عشر. وظهور التوابع كمفهوم مستقل يعود إلى بدايات الحساب اللامتناهي .

بين $Descartes(1596-1650)$ بوضوح أن أي معادلة بمتغيرين إثنين والتي يمكن تمثيلها هندسيا بمنحنى تدل على العلاقة بين كميتي هذين المتغيرين. وجاءت فكرة المشتق كوسيلة لإيجاد المماس لأي نقطة من هذا المنحنى .

لقد كان $Lebniz(1646-1716)$ أول من استخدم مصطلح " تابع " في 1673 إستخدمه للتعبير بصفة عامة عن علاقة الكميات الهندسية مثل المستقيمات العمودية والماسات بشكل المنحنى وقام أيضا بإدخال مصطلحات ثابت ومتغيرو معلم، وقد ظهرت الدالة أو التابع في المراسلات المتبادلة بين $Lebniz$ و $JeanBernoulli$ بين 1694 و 1698 لكن لم يظهر مصطلح

الدالة أو التابع في قاموس الرياضيات الذي نشر في 1716 .

فبعد عامين نشر *Bernoulli* مقالا على نطاق واسع، تضمن تعريفه للدالة أو التابع لمتغير ككمية تتكون بشكل ما من هذا المتغير وبعض الثوابت.

وأضاف $Euler(1707-1793)$ الذي كان طالبا سابقا لـ *Bernoulli* لمسته لهذا التعريف متحدثا عن التعبير التحليلي بدلا من الكمية وبالتالي تم تحديد مفهوم الدالة تطبيقيا بمفهوم التعبير التحليلي .

بعد ذلك بقليل لوحظ أن هذه الصيغة تؤدي إلى تضاربات في الواقع يمكن تمثيل نفس الدالة أول التابع بعدة تعبيرات تحليلية مختلفة. ومن خلال إستخدام المصطلحات في يومنا هذا يمكننا أن نقول أن تعريف *Euler* شمل فقط التوابع التحليلية، التي هي مجموعة فرعية محدودة من قسم التوابع المستمرة الصغيرة أصلا. و إدراكا لأوجه القصور هذه اقترح *Euler* تعريفا بديلا لم يحضى بالإهتمام وقتها .

و جاءت مساهمة أخرى مهمة فى تطور التابع من أعمال *Fourier* . الذي كان مهتما بمسألة إنتشار الحرارة في أجسام المواد. إعتبر *Fourier* درجة الحرارة كتابع من متغيرين إثنين الزمن و الفضاء.

وذهب بعيدا ليقدر أنه سيكون من الممكن الحصول على تحليل أي سلسلة مثلثية في مجال مناسب. ولعل ذلك لم يعطي *Fourier* إثباتا رياضيا لتأكيده.

تناول $Dirichlet(1805-1859)$ فصل مفهوم التابع عن مفهومه التحليلي الذي يصوغه قام بهذا في 1837 . مدليا بتعريف التابع عبارة عن تناسبيات عشوائية بين المتغيرات التي تمثل مجموعات عددية ثم أصبح التابع عبارة عن تناسب بين متغيرين اثنين.

حيث أن لكل قيمة للمتغير المستقل قيمة متغيرة تابع واحدة وواحدة فقط تنتسب إليها. كما قدم *Dirichlet* المثال الشهير للدالة الغير مستمرة في كل نقاط المجال $[0,1]$. حيث إذا كان x عدد كسري فإن $f(x)=0$ وخلاف ذلك $f(x)=1$.

مع تطور نظرية المجموعات التي بدأها $Contor(1918-1845)$ واصل مفهوم التابع التطور وفي القرن العشرين تم توسيع المفهوم ليشمل جميع التناسبيات العشوائية التي تلبي شرط التفرد بين المجموعات سواءكانت عددية أو غير عددية . واستمر التطور أكثر حيث انتقل علماء الرياضيات من مفهوم التناسب إلى مفهوم العلاقة و هذا المفهوم القريب نسبيا من مفهوم التابع يشكل مبدءا أصليا في نظرية التصنيف .

في البداية كان يستخدم مفهوم التابع للتعبير عن التناسب بين كميات هندسية، من خلال ارتباطها بدراسة التعبيرات التحليلية. كما تحتل التوابع مكانة أساسية في التيار الرئيسي للتفكير الرياضي للإشارة إلى الدور التاريخي لهذا الإرتباط.

علق $Youshkevitch(1976-1977)$ قائلا: الأسلوب التحليلي في إدخال التوابع هو الذي أحدث ثورة في الرياضيات ونظرا لكفاءته غير العادية أمن مكانة مركزية لمفهوم التابع في جميع العلوم الدقيقة. في الواقع هذا الإرتباط بين التعبيرات التحليلية و الأشياء الهندسية. كشف عن نفسه ليكون مثمرا حتى أنه لازال يفيد التطبيقات الرياضية الحالية .

2. تعاريف

1.2. تعريف التابع

لتكن X مجموعة كيفية . نقول أننا عرفنا على هذه المجموعة تابعا f ، إذا ألحقنا بعنصر x من X

عنصرا على الأكثر y من Y . نسمي المجموعة X مجموعة إنطلاق f ونسمي مجموعة القيم Y التي يأخذها هذا التابع بمجموعة وصول f ونكتب:

$$f : X \to Y$$

$$x \longmapsto f(x) = y$$

2.2. تعريف التطبيق

التطبيق هو علاقة من E نحو F ترفق بكل عنصر من E عنصرا واحدا من f . ونكتب :

$$f : X \to Y$$

$$x \longmapsto f(x) = y$$

$$\forall x \in E, \exists! y \in F; f(x) = y$$

ملاحظة

كل تطبيق هو تابع و العكس غير صحيح على العموم .

3.2. تعريف التطبيق المتباين

نقول عن تطبيق $f : X \to Y$ أنه متباين إذا تحقق التالي :

$$\forall x, y \in E; \qquad x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$$

4.2. تعريف التطبيق الغامر

نقول عن تطبيق $f : X \to Y$ أنه غامر إذا كان :

$$\forall y \in Y, \exists x \in X; f(x) = y$$

5.2. تعريف التطبيق التقابلي

نقول عن تطبيق $f : X \to Y$ أنه تقابلي إذا كان متباين و غامر في آن واحد . ونكتب :

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X; \qquad f(x) = y$$

6.2. تعريف التطبيق العكسي

إذا كان :

$$f : X \to Y$$
$$x \longmapsto f(x) = y$$

تطبيق تقابلي فإن لـ f تطبيقا عكسيا نرمز له بـ f^{-1} وهو تقابل معرف كما يلي:

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X$$
$$y \longmapsto f^{-1}(y) = x$$

ونقول عن f^{-1} و f أنهما متعاكسان لأن :

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad f(f^{-1}(y)) = y$$