Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure
-Vieux Kouba- (Alger)
Département de Mathématiques

وزارة التعليــــــم العالـــــي
والبحــث العلمـــي
المدرسة العليا للأساتذة
– القبة القديمة – (الجزائر)
قســم الرياضيـــات

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي
و شهادة أستاذ التعليم المتوسط

دراسة نظرية و تطبيقية لتقريب تكامل

من إعداد:
⋆ هـــارون سميـــر
⋆ مزياني عبد الحكيم
⋆ زنتـــار وليــــد

تحت إشراف الأستاذ:
⋆ بـوسعدة مـــراد

لجنة المناقشة :

هشام خليفي.......... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة........... رئيسا
نصراوي رياض.......... أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة.......... ممتحنا

دفعة جوان 2015

الفهـــــرس

دليل المصطلَحات و التعَاريف

تفَاتشَاكل

التطبيق $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ تفَاتشَاكل إِذَا كَان :

(1) – f تقَابلي

(2) – f قَابل للمفَاضلة علَى U

(3) – f^{-1} قَابل للمفَاضلة علَى $f(U)$.

قيمة حدية محلية

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

(1) – f يقبل قيمة حدية محلية صغرَى (كبرَى) عند a من U إِذَا وجد جوَار V ل a حيث
$\forall x \in V : f(x) \geq f(a)(f(x) \leq f(a)$(علَى التوَالي)

(2)– القيمة الحدية شَاملة إِذَا كَانت المتبَاينة صحيحة من أَجل كل قيم x من U.

التزَايد الأَسي

نقول عن تَابع f معرف علَى المجَال $]0; +\infty[$ إِذَا وجد عدّدين حقيقيّين ثَابتين موجبين M و C حيث
$$|f(x)| \leq M \exp^{Cx}$$
من أَجل x كبير بقدر كَافي.

تحويل فوريّيه

هو التحويل الفعلي من $L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ المعرف ب :
$$f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp^{-ix\xi} f(x)dx$$

التقَارب بَاِنتظَام

متّتَالية التوَابع $\{f_n\}_{n\in\infty}$ متقَاربة بَاِنتظَام نحو f علَى X إِذَا و فقط :

الرَاسب

رَاسب f عند Z_0 نرمز لهَا ب $Res(f(Z), Z_0) = a_{-1}$ حث a_{-1} هو معَامل في نشر لورَان

$$f(Z_0) = \frac{a_{-n}}{(Z - Z_0)^n} + ... + \frac{a_{-1}}{Z - Z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (Z_{Z0})^n$$

التَابع الدوري

$$f \text{ دوري و دوره } T \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x)$$

رمز لوندر

g, f تَابعين معرفين في جوَار a

$$\begin{aligned} f =^a O(g) &\iff \exists M > 0 : |f(x)| \leq M|g(x)| \\ &\iff \tfrac{f}{g} \text{ محدودة بَاِنتظَام بجوَار } a \end{aligned}$$

تعريفَات

*$D(\Omega)$ هو فضَاء التوَابع القَابلة للَاِشتقَاق بلَا تنَاه و ذَات سندَات مترَاصة و محتوَات في Ω

* $\sup$ هو أَصغر الحوَاد العليَا .

*$C^p(I, E)$ هو فضَاء التوَابع من الصنف C^p من I نحو E

* نسمي سبيل مفتوح U كل قوس $([a, b], \Gamma)$ في U حيث Γ من الصنف C^1 قطعيَا

* نسمي x_0 نقَاط حرجة ل f إِذَا كَان $f'(x_0) = 0$

* المعَامل التفَاضلي هو $\partial f = (i\lambda 2x)^{-1} \frac{df}{dx}$

* $\langle \Delta f, h \rangle_{L^2}$ هو جدَاء سلمي علَى L^2

* $\Delta f(x) = (i\lambda\varphi'(x))^{-1} \frac{df}{dx}$ هو المؤُثر التفَاضلي

* $C^k(\Omega)$ هو فضَاء التوَابع القَابلة للَاِشتقَاق k مرة بَالَاِستمرَار في Ω

مقدمَة

يعتبر موضوع سلوك التوَابع المعرفة بتكَامل بجوَار اللّانهَاية موضوع بحث من طرف العديد من الريَاضيَاتيّين؛ ندرس هذَا التكَامل بطريقتين:

أولًا: الطريقة المعروفة بِاسم طريقة لَابلَاس ($LAPLACE$) و التي تدرس التكَاملَات من النوع $\int_a^b \exp(\lambda\varphi(x))f(x)dx$ حيث φ تَابع قَابل لّلإشتقَاق مرتين و λ أكبرقيمة عظمَى في السلوك المقَارب لهذَا التكَامل.

* نعرف التكَاملَات في الفضَاء الإعتيَادي علَى شَاكلة $I(\lambda) = \int \exp(i\lambda\varphi(x))\psi(x)dx$ مع $\psi(x)$ ذو سند متراص.

ثَانيًا : ندرس السلوك بإستعمَال طريقة المرحلة الثَابتة و هي مشتقة من طريقة لَابلَاس؛ في هذه الطريقة نقرب التكَامل بجوَار حدود التكَامل ولكن أيضًا عند النقطة التي تكون فيهَا $\lambda\varphi(x)$ ثَابتة يعني عندمَا يكون مشتق φ معدومًا (المشتق حتَى الرتبة k).

*يندرج هذَا النوع من التكَاملَات في التحليل التوَافقي و نحتَاجه بشكل كبير لدرَاسة تكَاملَات بيسل و الدرَاسة المقَاربة لتحويلَات فوريّيه ($FOURIERS$) التي تعتبر أمثلة من هذه التكَاملَات و قد أستعملت هذه المقَاربة من طرَف العديد من علمَاء الريَاضيَات كـ " إيري ($AIRY$); ستوكس ($STOKCS$); لَايبشيتز ($LIPSCHITZ$); ريمَان ($RIEMAN$) " .

* ختَامًا نطبق هَاتين النظريتين علَى بعض التوَابع الخَاصة منهَا " بيسل ($BESSEL$); إيري ($AIRY$) " .