Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
École Normale Supérieure
-Vieux Kouba- (Alger)
Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المدرسة العليا للأساتذة
– القبة القديمة – (الجزائر)
قسم الرياضيات

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

الأمثلة المضادة في الحساب التفاضلي والتكاملي

من إعداد الطلبة:
⋆ سراي علي
⋆ صدوفي أحمد

تحت إشراف الأستاذ:
⋆ فادة علاب

لجنة المناقشة :

ولد حمودة عمار ..... رئيسا
فادة علاب ..... مشرفا
علون محمد علي ..... منافشا

السنة الجامعية:2015/2014
دفعة جوان:2015

المحتويات

مقدمة.....01

الفصل I : مفاهيم عامة

1- تذكير في الجبر.....04

-مثال لمجموعة مرتبة و ليست مرتبة كليا.....04

- مثال لمجموعة محدودة من الأدنى و غير محدودة من الأعلى 06

- مثال لمجموعة محدودة من الأدنى و من الأعلى ولا تملك قيمة صغرى ولا قيمة عظمى.....06

- مثال لمجموعة غير خالية محدودة ولا تملك حدا أعلى ولا حدا أدنى 06

2- مجـــــــــموعة الأعـــــــداد الحـــــــقيـقية.....07

-مثال لمتتالية مجالات متداخلة لا تحقق نظرية كـــانتـور 09

- مثال لمجموعة غير عـــــــــدودة.....10

- مثال لعدد جبـــــــــــــري غير قابل للانشـــــــــاء.....11

- مثال لعدد جبـــــــــــــري قابل للانشـــــــــاء ولكنه غير نـــــاطق.....11

3- بعض الخـــــــــــــواص الطبولوجـــــــية لـــمجموعة الأعداد الحقيقية.....12

- تقاطع عدد غير منته من المفتوحات ليس دائما مفتوح 13

-اتحاد عدد غير منته من المغلقات ليس دائما مغلق.....13

الفصل II : التوابع الحقيقية لمتغير حقيقي الاستمـــــــرار و النهـــــايات

1-الاستمـــــــــــــــرار 17

- مثال لتابع غير مستمر عند أي نقطة 18

- مثال لتابع مستمر عند نقطة وحيدة هـــــــــــي 0 18

-مثال لتابع مستمر عند كل النقاط مـاعدا نقطة وحيدة.....19

- مثال لتابع غير مستمر علـــــى مجموعـــــــة الأعداد الصحيحـــة $\mathbb{Z}$ 20

- مثال لتابع مستمر على $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$و غير مستمر على$\mathbb{Q}$.....20

-لا يوجد تابع مستمر على $\mathbb{Q}$ و غير مستمر على $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 22

2 - الاستمرار المنتظم و الاسنمرار المطلق و الاستمرار الليبشيتزي.....23
- مثال لتابع مستمر على مجال ولكنه غير مستمر بانتظـــــــام.....23
- مثال لتابع مستمر و محدود على مجال مغلق غير مستمر بانتظـــــــام.....24
- مثال لتابع مستمر على مجال مغلق و غير محدود عليه.....24
- مثال لتابع مستمر بانتظـــــــام و غير مستمر مطلقـــــــــا.....25
- مثال لتابع مستمر بانتظـــــــام و لكنه ليس لبشيتزي.....26
3- النهـــــــايـــــات.....27
- تابع يقبل نهـــــاية من اليمين ويقبل نهـــــاية من اليسار ولكن غير مستمر.....28
- تابع يقبل نهـــــاية من اليمين ويقبل نهـــــاية من اليسار ولكن غير متساويتين و غير مستمر.....28
- تابع لا يقبل نهـــــاية من اليمين ولا من اليسار عند الصفر.....28
- تابع لايقبل نهـــــاية من اليمين و لا يقبل نهاية من اليسار في نقطة من $\mathbb{Q}$ لكن مستمر في جميع نقاط $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 29
- تابع مستمر من اليسار على $\mathbb{R}$ لكن لا يقبل نهـــــاية من اليمين في جميع نقاط مجموعة كثيفة.....30
- تابع لا يقبل نهـــــاية من اليمين ولا يقبل نهـــــاية من اليسار في جميع نقاط R.....30
4- الرتابـــــــة – المحدودية – الدوريـــــــــة.....31
- مثال لتابع متزايد تماما على [1; 0] وغير مستمر عند جميع نقاط المجموعة الكثيفة [1; 0].....31
- مثال لتابع غير محـــــدود.....33
- مثال لتابع مستمر على قطعة مستقيمة و ليس ذو تغير محدود.....34
- مثال لتابع دوري لا يقبل أصغر دورة.....35
- مثال لتابع دوري وغير مـــــــــحدود.....36

الفصل III : التوابع الحقيقية لمتغير حقيقي الاشـــــــــــتقاقـــــــية

1- الاشتقاقبة و الاستمـــــــــــــــرار.....38
- مثال لتابع لا يقبل الاشتقاق عند أي نقطـــة.....39
- مثال لتابع مستمر و قابل للاشتقاق عند كل النقاط مـاعدا نقطة وحيدة.....39
- مثال لتابع مستمر على R و يقبل الاشتقاق على R^* ولكن لا يقبل الاشتقاق من اليمين ولا من اليسار عند 0 40
- مثال لتابع يقبل الاشتقاق عند الصفر و غير مستمر على R^*.....41
- مثال لتابع مستمر على R ولا يقبل الاشتقاق عند أي نقطة (تابع فيرشتراس).....42

2- الاشتقاقبة و النهـــــــــــايات 47

- مثال لتابع يقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و لكن تابعه المشتق لا يقبل نهـــاية عند $+\infty$ 47

- مثال لتابع يقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ بحيث $\lim_{x\to+\infty} inf(f`(x)) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} sup(f'(x)) = +\infty$ 48

- مثال لتابع يقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ و $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 48

- مثال لتابع يقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ و $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ لكنه لا يقبل نهاية عند $+\infty$49

- مثال لتابع يقبل الاشتقاق على R تابعه المشتق لا يقبل نهـــاية لا من اليمين ولا من اليسار عند 0 49

3- الاشتقاقبة و القيم القصـــــــــــــوى 50

- مثال لتابع قابل للاشتقاق على R و تابعه المشتق معدوم عند الصفر ولا يقبل قيمة قصوى عند الصفر 51

- مثال لتابع قابل للاشتقاق على R و $f'(x)> 0$ ولكن f غير متزايد تمـــــــاما عند أي جوار للصفر ...51

- مثال لتابع قابل للاشتقاق على R و يقبل قيمة قصوى عتد الصفر ولكن غير متزايد في جوار الصفر من اليمين ...52

- مثال لتابع قابل للاشتقاق و مشتقه موجب تمـــــــاما و لكن غير متزايد 53

الفصل IV : تكـــــــــــــامل ريـــــــمان

1- تكـــــــــــــامل ريـــــــمان 55

- مثال لتابع معرف و محـــــدود على مجال مغلق ولكنه ليس ريمان كمـــــول 56

- مثال لتابع مربعه ريمان كمـــــول لكنه ليس ريمان كمـــــول.....57

- مثال لتابع غير مستمر و غير رتيب لكنه ريمان كمـــــول 57

- مثال لتابع موجب و قابل للمكاملة على [1; 0] و تكامله معدوم ولكنه غير معدوم تماما على [1; 0].....59

- مثال لتركيب تابعين ريمـــــان كمول ليس ريمـــــان كمول 59

2- مجـــاميع ريـــــــمان 60

- مثال لتابع معرف على مجال و مجاميع ريمان لا تقبل نهايـــــــــــــة في R 61

- مثال لتابع كمول على مجال و مجاميع ريمان لا تقبل نهايـــــــــــــة في R 62

3-تقـــــــــــارب التكامـــــــــــلات 64
- مثال لتابع قابل للمكاملة محليا على]∞+; 0] و تكامله نصف متقارب 66
- مثال لتابع قابل للمكاملة محليا، موجب و متناقص على]∞+; 1] ولكن غير قابل للمكاملة عليه.....68
- مثال لتابع موجب و قابل للمكاملة ولكن مربعه غير قابل للمكاملة 68
- مثال لتابع ريمان كمول على مجال مغلق لكنه لا يملك تابع أصلي 69

خاتمة 70

قائمة المراجـــــــع

الملاحق

مقدمة

السؤال الذي يطرح كثيرا في الرياضيات " هل القضية E صحيحة ؟" الفرض المحدد لـ E له الشكل " كل عنصر من الصنف A هو من الصنف B : $A \subset B$ ؟ " اثبات صحة E يعود الى اثبات الإحتواء $A \subset B$ ولإثبات عدم صحته يكفي ايجاد عنصر من A لا ينتمي الى B بمعنى آخر ايجاد **مثال مضاد** .

فعلى سبيل المثال E هي " كل الدوال المستمرة قابلة للاشتقاق " فإن المجموعتين Aو B هما على التوالي " مجموعة التوابع المستمرة" و" مجموعة التوابع القابلة للإشتقاق" ، المثال الشهير لفيرشتراس لتابع f مستمر و غير قابل للإشتقاق عند أي نقطة هو بالتالي مثال مضاد للإحتواء $A \subset B$ لأنه ينتمي لـA ولكن لا ينتمي لـ B .

وعلى العموم الأمثلة في الرياضيات تنقسم إلى نوعين : مبيّنة و مضادة ، نحن لا نريد اعطاء تفسير شامل لمصطلح **المثال المضاد** لأن معناه واسع بما فيه الكفاية و يشمل كل الأمثلة التي لا تدعم صحة القضية E .هكذا نقول إن كثير الحدود كتابع مستمر ليس مثال مضاد لكن بإعتباره تابع غير محدود فهو مثال مضاد . نعلم انه اذا كان سؤال رياضي محلول عن طريق مثال مضاد لا يعطي كل الإقناع النفسي و يظهر رأيا منفردا و لكن نعلم ايضا أن كثيرا من الإسهامات الرياضية مبرهنة بأمثلة مضادة ، في هذا السياق يمكن اعتبار مذكرتنا كمكمل للدروس الكلاسيكية في التحليل .