الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة
القبة القديمة (الجزائر)
قسم الرياضيات

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
ECOLE NORMAL SUPERIEURE VIEUX KOUBA (ALGER)
Département de Mathématiques

مسألة بواسون- دراسة نظرية وحساب الحلول التقريبية

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ التعليم الثانوي

من إعداد
خيري نادية
هنان لويزة
حفاف حورية

تحت إشراف الأستاذ
مختاري عبد الحق

لجنة المناقشة

الأستاذ : دلال عبد القادر.................................. رئيسا.
الأستاذ: مختاري عبد الحق.............................. مشرفا.
الأستاذ: خضراوي عثمان................................ ممتحنة.

السنة الجامعية: 2015/2014

دفعة جوان 2015

الفهرس

قائمة المصطلحات

عربي - فرنسي

–A–

ملاصقة .... Adherence

تطبيق .... Appliqation

–B–

تقابل .... Bijection

محدود .... Bornee

–C –

متراص .... Compact

تام .... Complet

نتيجة .... Conclusion

شرط .... Condition

مترابط .... Connexe

لازمة .... Corollaire

ثابت .... Constant

مستمر .... Continue

تقارب .... Convergence

—D—

Definition . . . . تعريف

Demonstration . . . . إثبات

Dense . . . . كثيف

Densite . . . . كثافة

Disjoint . . . . منفصل

Distance . . . . مسافة

—E—

Element . . . . عنصر

Elliptique . . . . ناقصي

Ensemble . . . . مجموعة

Equation . . . . معادلة

Equivalence . . . . تكافوء

Espace . . . . فضاء

Espace de Hillbert . . . . فضاء هلبرتي

Espace Vectorielle . . . . فضاء شعاعي

—F—

Ferme . . . . مغلق

Fini [Infini] . . . . منته [غير منته]

Fonction . . . . دالة

Forme Bilineaire . . . . شكل ثنائي الخطية

Forme Linaire . . . . شكل خطي

Frontiere . . . . الحافة

–I–

Implication . . . . إستلزام

Inclusion . . . . إحتواء

Inégalité . . . . متباينة

Injection . . . . تباين

Intersection . . . . تقاطع

Intervalle . . . . مجال

Integral . . . . تكامل

Intégration par parties . . . . تكامل بالتجزئة

–G–

Gradient . . . . تدرج

–L–

Lacalement compact . . . . متراص محليا

lamme . . . . توطئة

Limite . . . . نهاية

– N –

Nombre . . . . عدد

Norme . . . . نظيم

Nul . . . . معدوم

– O–

Opérateur . . . . مؤثر

Ouvert . . . . مفتوح

– P–

Polynome . . . . كثير حدود

Positif . . . . موجب

Presque partout[P.P] . . . . شبه كلي [شك]

Preuve . . . . برهان

Probléme . . . . مسألة

probléme fabile . . . . مسألة ضعيفة

Probléme aux limités . . . . مسألة حدية

Produit . . . . جداء

Proposition . . . . قضية

–R –

Relation . . . . علاقة

Réel . . . . حقيقي

–S–

Suite . . . . متتالية

Support . . . . السند (الحامل)

—T—

Tendr vers . . . . يؤول

—U—

Union . . . . إتحاد

Unicité . . . . وحدانية

مقـــدمة

معادلة بواسون (poisson) هي معادلة تفاضلية جزئية من الدرجة الثانية، سميت عرفانا بالعالم الفيزيائي الفرنسي سيميون بواسون الذي يعد أول من إكتشف تطبيقها في الجاذبية الكونية والكهرباء الساكنة. حيث قام بضبط العلاقة بين الجهد الكهربائي، وتوزيع الشحنة الكهربائية، كما أنّ لها عدة تطبيقات في نظرية الكمون.

تصاغ معادلة بواسون رياضيا حسب ما يلي:

$\Delta\varphi = f$ حيث f دالة حقيقية و φ هي المطلوب إيجادها وهي بدورها مقدار سلمي، فيما يمثل Δ رمز المؤثر التفاضلي لابلاسيان (lablacien) .

تفكك المعادلة في الإحداثيات الديكارتية ثلاثية الأبعاد على النحو التالي:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=f(x,y,z)$$

وحينما تكون $f=0$ تسمى المعادلة بـ معادلة لابلاس التوافقية.

في الكهرباء الساكنة: حسب قانون جاوس Gawss (أحد معادلات ماكسويل) فإنّ

$$\nabla D=\rho$$

∇ هو مؤثّر التباعد، D تمثل الإزاحة الكهربائية، ρ كثافة الشحنات الحرة.

وبما أنّ

$$D=\varepsilon E$$

حيث ε سماحية الوسط، E المجال الكهربائي.

وبما أنّ لكل مجال كهروسكوني (حسب معادلات ماكسويل للمجالات الكهربائية الساكنة)، $\nabla XE = 0$ مع ∇X يمثل مؤثر التكور، فإنه يمكن كتابة المجال الكهربائي حسب التالي:

$$E = -\nabla V$$

حيث V تمثل الكمون الكهربائي، ∇ هو مؤثر التدرج.

بتطبيق مؤثر التباعد على المعادلة (2.0) ثم تعويض الطرف الأيسر بالمعادلة (??) و (2.0) ينتج ما يلي:

$\nabla(\nabla V) = \nabla^2 V = \Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$ وهذه المعادلة تصوغ شكل معادلة بواسون.

إنّ هذا التقديم البسيط لمعادلة بواسون يعطي إشارة للعمل المتواضع الذي تضمنته مذكرتنا، والمتمثل في دراسة وجود الحلول لهذه المعادلة بشروط حدية(ديريكلي، نيومان، المختلطة) وحساب الحلول التقريبية لها بإستعمال طريقة العناصر المنتهية.

سنقدم هذه الدراسة في ثلاث فصول، حيث نقدم في الفصل الأول المفاهيم والنظريات الأساسية التي تساعدنا في دراسة هذه المعادلة. أمّا في الفصل الثاني نقوم بدراسة وجود الحلول لهذه المعادلة التي تصبح مسألة عند تزويدها بأحد الشروط الحدية، فنقول مسألة دريكلي أو نيومان لمعادلة بواسون، وهذا حسب الشرط الحدي الذي يضاف إلى المعادلة، وتتم هذه الدراسة على ثلاث خطوات هي إيجاد الصيغة التغايرية ثم حلها ثم التكافؤ مع المسألة، أمّا في الفصل الثالث نتعرف على طريقة غالركين التي تعتبر مقدمة لطريقة العناصر المنتهية التي نستعملها في حساب الحلول التقريبية لهذه المعادلة وهذا في البعدين الأول والثاني، ونختم هذا العمل بدراسة خطأ التقريب وتقارب طريقة العناصر المنتهية.